Cvičenia zo všeobecnej topológie

14. decembra 2011

1 Základné pojmy

1.1 *Nech* d *je metrika na množine* X. *Definujme* $d_1, d_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$; $d_1(x, y) = min\{d(x, y), 1\}$, $d_2(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. *Dokážte, že* d_1, d_2 *sú metriky na* X, *ktoré určujú rovnakú topológiu.*

1.2 *Nech* $\mathbb{N}$ *je množina všetkých prirodzených čísel,* $a, b \in \mathbb{N}$. *Označme* $\mathbb{N}_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. *Dokážte, že systém* $\mathcal{B} = \{\mathbb{N}_{a,b} : \ a, b \in \mathbb{N}\}$ *je báza topológie na* $\mathbb{N}$.

1.3 *Nech* $\mathcal{B}_1$ *je báza topológie* $\mathcal{T}_1$ *a* $\mathcal{B}_2$ *je báza topológie* $\mathcal{T}_2$. *Nech pre každé* $V \in \mathcal{B}_1$ *and* $a \in V$ *existuje* $W \in \mathcal{B}_2$ *tak, že* $a \in W \subseteq V$. *Dokážte, že* $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

1.4 *Definujte pojem bázy (subbázy) pre systém všetkých uzavretých podmnožín v topologickom priestore. Sformulujte a dokážte pre tieto pojmy analogické tvrdenia k tvrdeniam o báze (subbáze) topológie.*

1.5 *Dokážte, že platí:*
a) Ak $\mathcal{S}$ *je neprázdny systém topológií na* X, *tak aj* $\mathcal{T}_\mathcal{S} = \bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{S}} \mathcal{T}$ *je topológia na* X.
b) Ak $\mathcal{A}$ *je ľubovoľný systém podmnožín množiny* X, *tak existuje topológia* $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ *na* X, *ktorá má nasledujúce vlastnosti:*
(i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{A}$
(ii) Ak T *je topológia na* X *a* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$, *tak* $\mathcal{T}_\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$.

1.6 *Nech* $\mathcal{A}$ *je ľuboboľný systém podmnožín množiny* X. *Potom* $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \{X\}$ *je subbáza nejakej topológie* $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ *na* X. *Dokážte, že* $\mathcal{T}_\mathcal{S} = \mathcal{T}_\mathcal{A}$, *kde* $\mathcal{T}_\mathcal{A}$ *je topológia z predchádzajúceho cvičenia.*

1.7 *Nájdite príklad dvoch topológií na nejakej množine* X, *ktorých zjednotenie nie je topológia na* X.

1.8 *Overte, že systémy* $\mathcal{B}_1 = \{[a,\ b] : a, b \in \mathbb{Q},\ a \leq b\}$, $\mathcal{B}_2 = \{[a,\ b] : a < b,\ a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, $\mathcal{B}_3 = \{[a,\ b] :\ a,\ b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ a \leq b\}$ *sú bázy troch rôznych topológií na* $\mathbb{R}$.

1.9 *Dokážte, že v každom topologickom priestore* X *pre každé* $A, B \subseteq X$ *platí* $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. *Uveďte príklad topologického priestoru a jeho podmnožín* A, B *tak, aby platilo* $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

1.10 *Nech* $(X,\ \mathcal{T})$ *je topologický priestor,* $A \subseteq X$. *Bod* $c \in X$ *sa nazýva hraničným bodom množiny* A *v* $(X,\ \mathcal{T})$, *ak pre každé okolie* U *bodu a platí* $U \cap A \neq \emptyset$ *aj* $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. *Označme* $b(A)$ *množinu všetkých hraničných bodov množiny* A *- táto množina sa nazýva hranica množiny* A.
a) Určte $b(\mathbb{Q})$, $b(\mathbb{N})$, $b((0,\ 1))$, $b([0,\ 1]$ *v prestore reálnych čísel s obvyklou topológiou, v Sorgenfreyovej priamke, v* $(\mathbb{R},\ \mathcal{T}_{\rightarrow})$, *kde* $\mathcal{T}_{\rightarrow} = \{(a, \infty) :\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset,\ \mathbb{R}\}$, $(\mathbb{R},\ \mathcal{T}_{dis})$ *a* $(\mathbb{R},\ \mathcal{T}_{ind})$.
b) Dokážte, že $b(A) = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.
c) Dokážte, že $\overline{A} = A \cup b(A)$.
d) Dokážte, že $b(A)$ *je uzavretá množina.*

1.11 *Overte, že ak* X *je podpriestor priestoru* Y *a* Y *je podpriestor priestoru* Z, *tak aj* X *je podpriestor priestoru* Z.

1.12 *Uveďte príklad množiny* X *a nekonečnej postupnosti navzájom rôznych metrík (resp. metrík ohraničených 1) na* X *tak, aby všetky tieto metriky určovali tú istú topológiu na* X.

1.13 *Nech* $(X,\ d)$ *je metrický priestor,* $\emptyset \neq A \subseteq X$. *Nech pre* $c \in X$ $d(c,\ A) = \inf\{d(c,\ a) :\ a \in A\}$. *Dokážte, že pre každé* $c \in X$ $c \in \overline{X}$ *v* $(X,\ \mathcal{T}_d)$ *vtedy a len vtedy, ak* $d(c,\ A) = 0$.

1.14 *Nech* $\mathbb{R}$ *je množina všetkých reálnych čísel a* $\mathcal{T}$ *je kofinitná topológia na* $\mathbb{R}$, *t. j.* $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mathbb{R} \setminus U \text{ je konečná}\} \cup \{\emptyset\}$. *Dokážte, že priestor* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *je separabilný a nevyhovuje 1. axiome spočítateľnosti.*

1.15 *Ukážte, že Sorgenfreyova priamka vyhovuje 1. axiome spočítateľnosti a nemá spočítateľnú bázu.*

1.16 *Zistite, či Sorgenfreyova priamka je metrizovateľný priestor.*

1.17 *Dokážte, že ak topologický priestor* X *má spočítateľnú bázu, tak každá báza topológie priestoru* X *obsahuje spočítateľnú bázu.*

2 Spojité zobrazenia

2.1 *Nech* X, Y *sú topologické priestory,* $f : X \longrightarrow Y$ *je zobrazenie a* $a \in X$. *Dokážte, že* f *je spojité v bode* a *vtedy a len vtedy ak pre každú podmnožinu* $A \subseteq X$ *platí: Ak* $a \in \overline{A}$, *tak* $f(a) \in \overline{f[A]}$.

2.2 *Dokážte, že ak* $f : X \longrightarrow Y$ *je spojité v bode* $a \in X$ *a* $g : Y \longrightarrow Z$ *je spojité v bode* $f(a)$, *tak zložené zobrazenie* $g \circ f : X \longrightarrow Z$ *je spojité v bode* a.

2.3 *Overte, že platí:*
a) $\sin : [0,\ 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *je uzavreté spojité zobrazenie, ktoré nie je otvorené.*
b) $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,\ 1]$ *je otvorené spojité zobrazenie, ktoré nie je uzavreté.*

2.4 *Overte, že priestor* $\mathbb{R}$ *reálnych čísel s obvyklou topológiou a Sorgenfreyova priamka nie sú homeomorfné.*

2.5 *Nech* $f,\ g : X \longrightarrow Y$ *sú spojité zobrazenia a* Y *je* T_2*-priestor. Dokážte, že množina* $E = \{x \in X :\ f(x) = g(x)\}$ *je uzavretá podmnožina* X. *Ako dôsledok dostávame, že ak* $A \subseteq X$, $\overline{A} = X$ *a* $f\mid_A = g\mid_A$, *tak* $f = g$.

2.6 *Nech* $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ *a* $[-1,\ 1] \times [-1,\ 1]$ *sú podpriestory priestoru* $\mathbb{R}^2$ *s obvyklou topológiou. Dokážte, že tieto priestory sú homeomorfné.*

2.7 *Overte, že stereografická projekcia je homeomorfizmus.*

2.8 *Overte, že nasledujúce zobrazenia sú spojité (*$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ *sú priestory s obvyklou topológiou určenou euklidovskou metrikou):*
a) $f :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ f(a,b) = a + b$
b) $g :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ g(a,b) = a.b$
c) $h :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R};\ h(a_1,\ ...,\ a_n) = max\{a_1,\ ...,\ a_n\}$
d) $u :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R};\ u(a_1,\ ...,\ a_n) = min\{a_1,\ ...,\ a_n\}$

2.9 *Nájdite topologické priestory* X, Y, *subbázu* $\mathcal{S}$ *v priestore* X *a spojité zobrazenie* f *priestoru* X *do priestoru* Y *tak, že pre každé* $V \in \mathcal{S}$ $f(V)$ *je otvorená v* Y *al* f *nie je otvorené zobrazenie.*

2.10 *Nech* $(X,\ \mathcal{T})$ *je topologický priestor,* $A \subseteq X$. *Definujme* $intA = \cup\{V \in \mathcal{T} :\ V \subseteq A\}$, $intA$ *sa nazýva vnútro množiny* A.
a) Dokážte, že platí:
1. Pre každé $A \subseteq X$ *platí* $intA \subseteq A$.
2. $intX = X$.
3. A *je otvorená v* $(X,\ \mathcal{T})$ *vtedy a len vtedy, keď* $intA = A$.
4. Pre každé $A, B \in \mathcal{P}(X)$ *platí* $int(A \cap A) = intA \cap intB$.
5. Pre každé $A \in \mathcal{P}(X)$ *platí* $int(intA) = intA$.
6. Pre každé $A \in \mathcal{P}(X)$ *platí* $intA = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$.
b) Zistite, či platí: Zobrazenie $f : X \longrightarrow Y$ *je spojité vtedy a len vtedy, keď pre každé* $A \in \mathcal{P}(X)$ *platí* $f[intA] \supseteq intf[A]$.

2.11 *Dokážte, že*
a) Všetky otvorené intervaly ako podpriestory priestoru $\mathbb{R}$ *sú navzájom homeomorfné.*
b) Všetky uzavreté ohraničené intervaly ako podpriestory priestoru $\mathbb{R}$ *sú navzájom homeomorfné.*
c) Žiadne dva z intervalov $(0,\ 1)$, $(0,\ 1]$, $[0,\ 1]$ *nie sú homeomorfné (ako podpriestory priestoru* $\mathbb{R}$*).*

2.12 *Nájdite priestory* X, Y *také, že existuje vnorenie* X *do* Y, *existuje vnorenie* Y *do* X *a priestory* X, Y *nie sú homeomorfné.*

3 Základné topologické konštrukcie a príbuzné pojmy

3.1 *Dokážte, že X je T_2-priestor vtedy a len vtedy, ak podmnožina $\Delta_X = \{(x,x):\ x \in X\}$ priestoru $X \times X$ je uzavretá v $X \times X$.*

3.2 *Nech X, Y sú priestory, Y je T_2-priestor a $f: X \longrightarrow Y$ je spojité zobrazenie. Dokážte, že potom množina $\{(x, f(x)):\ x \in X\}$ je uzavretá v $X \times Y$. Platí aj obtátené tvrdenie?*

3.3 *Nech pre každé $\alpha \in I$ je M_α podpriestor priesoru X_α. Dokážte, že potom $\prod_{\alpha \in I} M_\alpha$ je podpriestor priestoru $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.*

3.4 *Nech $f_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$, $f_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ sú spojité zobrazenia. Dokážte, že potom aj zobrazenie $f_1 \times f_2 :\ X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$; $(f_1 \times f_2)(x,y) = (f_1(x), f_2(y))$ je spojité.*

3.5 *Nech $\mathbb{R}$ je priestor reálnych čísel s obvyklou topológiou, $n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že súčinová topológia priestoru $\mathbb{R}^n$ je totožná s topológiou, ktoré je určená euklidovskou metrikou na množine $\mathbb{R}^n$.*

3.6 *Nech $(X,\ d_X)$, $(Y,\ d_Y)$ sú metrické priestory.*
a) Overte, že $d:\ (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R};\ d((a,b),(c,d)) = d_X(a,c) + d_Y(b,d)$ je metrika na $X \times Y$.
b) Dokážte, že $(X \times Y,\ \mathcal{T}_d) = (X,\ \mathcal{T}_{d_X}) \times (Y,\ \mathcal{T}_{d_Y})$.

3.7 *Nech X, Y sú topologické priestory a $X \times Y$ je ich topologický súčin. Dokážte že platí:*
a) Pre každé $a \in X$ je podpriestor určený množinou $\{a\} \times Y$ priestoru $X \times Y$ homemorfný s priestorom Y a pre každé $b \in Y$ je podpriestor určený množinou $X \times \{b\}$ priestoru $X \times Y$ homeomorfný s X.
b) Priestor X je homeomorfný s podpriestorom $\Delta_X = \{(x,x):\ x \in X\}$ priestoru $X \times X$.
c) Zovšeobecnite vhodným spôsobom, ak je to možné, a), b) pre topologický súčin ľubovoľného neprázdneho systému topologických priestorov

3.8 *Nech X je priestor. Dokážte, že platí:*
a) Priestor X je normálny vtedy a len vtedy, ak pre ľubovoľné otvorené podmnožiny U, V priestoru X také, že $U \cup V = X$ existujú uzavreté podmnožiny A, B priestoru X tak, že $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $A \cup B = X$.
b) Dokážte, že ak X je normálny (T_4-) priestor a $f:\ X \longrightarrow Y$ je uzavreté, spojité a surjektívne zobrazenie, tak aj Y je normálny (T_4-) priestor.
c) Ilustrujte na príkladoch, že pre faktorové zobrazenia a otvorené,spojité a surjektívne zobrazenia analogické tvrdenie neplatí.

3.9 *a) Nech $f:\ X \longrightarrow Y$ je faktorové zobrazenie, A je podpriestor priestoru X, $f(A)$ je podpriestor priestoru Y. Ukážte na príklade, že zúžené zobrazenie*

$f|_A\colon\ A \longrightarrow f(A)$ nemusí byť faktorové zobrazenie.
b) Nech $f:\ X \longrightarrow Y$ je faktorové zobrazenie, $B \subseteq Y$. Dokážte, že ak B je uzavretý alebo otvorený podpriestor priestoru Y a $f_{-1}(B)$ označuje podpriestor priestoru X určený množinou $\{x \in X:\ f(x) \in B\}$ tak zobrazenie $f|_{f_{-1}(B)}$: $f_{-1}(B) \longrightarrow B$ je faktorové zobrazenie. Ilustrujte na príkladoch, že predpoklad o uzavretosti, resp. otvorenosti podpriestoru B nie je možné vynechať.

3.10 *a) Nech E je relácia ekvivalencie na priestore $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ (podpriestor priestoru $\mathbb{R}^2$) taká, že $(x,\ y)E(u,\ v)$ vtedy a len vtedy, keď $(x,\ y) = (u,\ v)$ alebo $y = v$ a $\{x,\ u\} = \{0,\ 1\}$. Dokážte, že faktorový priestor priestoru $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ podľa E je homeomorfný s priestorom $S^1 \times [0,\ 1]$, kde S^1 je podpriestor priestoru $\mathbb{R}^2$ určený množinou $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2:\ x^2 + y^2 = 1\}$.*
b) Nech E je relácia ekvivalencie na priestore $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ (podpriestor priestoru $\mathbb{R}^2$) taká, že $(x,\ y)E(u,\ v)$ vtedy a len vtedy, keď $(x,\ y) = (u,\ v)$ alebo $y = v$ a $\{x,\ u\} = \{0,\ 1\}$ alebo $x = u$ a $\{y,\ v\} = \{0,\ 1\}$. Dokážte, že faktorový priestor priestoru $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ podľa E je homeomorfný s priestorom $S^1 \times S^1$.

4 Kompaktné priestory

4.1 *a) Dokážte, že ak A je uzavretá a B je kompaktná podmnožina priestoru X, tak $A \cap B$ je kompaktná.*
b) Nájdite príklad priestoru X, v ktorom existujú kompaktné podmnožiny A, B také, že $A \cap B$ nie je kompaktná.
c) Nájdite príklad T_1-priestoru X, v ktorom existujú kompaktné podmnožiny A, B také, že $A \cap B$ nie je kompaktná.

4.2 *a) Nech A je kompaktná podmnožina priestoru X, B je kompaktná podmnožina priestoru Y a W je otvorená podmnožina priestoru $X \times Y$, pre ktorú $A \times B \subseteq W$. Dokážte, že existuje otvorená podmnožina U priestoru X a otvorená podmnožina V priestoru Y tak, že $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \times V \subseteq W$.*
b) Dokážte, že ak X je kompaktný a Y je ľubovoľný priestor, tak projekcia $p_Y:\ X \times Y \longrightarrow Y$ je uzavreté zobrazenie.

4.3 *Dokážte, že Sorgenfreyova priamka nie je lokálne kompaktný priestor.*

4.4 *a) Nech X je lokálne kompaktný T_2-priestor a $\mathcal{B}$ je báza topológie X. Dokážte, že $\mathcal{B}_1 = \{V \in \mathcal{B}:\ \overline{V}$ je kompaktná podmnožina $X\}$ je tiež báza topológie X.*
b) Dokážte, že ak X je lokálne kompaktný priestor so spočítateľnou bázou, tak aj jednobodová kompaktifikácia X^* má spočítateľnú bázu.

4.5 *Nech X je kompaktný T_2-priestor, $a \in X$ a $\{a\}$ nie je otvorená podmnožina X. Nech $Y = X \setminus \{a\}$ je podpriestor priestoru X. Potom Y je lokálne kompaktný T_2-priestor a priestor Y^* je homeomorfný s X. Dokážte!*

4.6 *Nech X, Y sú lokálne kompaktné T_2-priestory, ktoré sú homeomorfné. Dokážte, že potom aj jednobodové kompaktifikácie X^*, Y^* sú homeomorfné.*

Nájdite príklad lokálne kompaktných T_2-priestorov X, Y takých, že X nie je homeomorfný s Y a X^* je homeomorfný s Y^*.

4.7 *Dokážte, že $(\mathbb{R}_n)^*$ je homeomorfný s S^n.*

4.8 *Dokážte, že ak X, Y sú lokálne kompaktné priestory, tak aj $X \times Y$ je lokálne kompaktný priestor.*

4.9 *Nájdite príklad priestoru X, ktorý nie je T_2-priestor a v ktorom každá kompaktná podmnožina je uzavretá.*

4.10 *Priestor X sa nazýva sekvenciálny, ak platí: Podmnožina $A \subseteq B$ je uzavretá v X práve vtedy, keď pre každú konvergentnú postupnosť (a_n) v A všetky jej limity patria do A.*
a) Dokážte, že ak priestor X vyhovuje 1. axiome spočítateľnosti, tak X je sekvenciálny.
b) Nájdite príklad sekvenciálneho priestoru, ktorý nevyhovuje 1. axiome spočítateľnosti.
c) Dokážte, že ak X je sekvenciálny a Y je ľubovoľný priestor, tak zobrazenie $f: X \longrightarrow Y$ je spojité práve vtedy, keď pre každé $a \in X$ a postupnosť (x_n) v X, ktorá konverguje k a platí, že postupnosť $f(x_n)$ konverguje k $f(a)$.
d) Dokážte, že ak $p: X \longrightarrow Y$ je faktorové zobrazenie a X je sekvenciálny priestor, tak aj Y je sekvenciálny priestor.
e) Dokážte, že topologický súčet ľubovoľného systému sekvenciálnych priestorov je sekvenciálny priestor.

4.11 *Nech X je regulárny priestor, A je kompaktná podmnožina X, B je uzavretá podmnožina X a $A \cap B = \emptyset$. Dokážte, že existujú otvorené podmnožiny U, V priestoru X, pre ktoré $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$.*

4.12 *Nech X je úplne regulárny priestor, A je kompaktná podmnožina X, B je uzavretá podmnožina X a $A \cap B = \emptyset$. Dokážte, že existuje spojité zobrazenie $f: X \longrightarrow [0,1]$ také, že $f(A) \subseteq \{0\}$ a $f(B) \subseteq \{1\}$.*

5 Súvislosť

5.1 *Dokážte, že nasledujúce výroky sú ekvivalentné:*
(a) Priestor X je súvislý.
(b) Pre každú otvorenú a súčasne uzavretú podmnožinu A priestoru X platí, že $A = \emptyset$ alebo $A = X$.
(c) Ak A, B sú uzavreté podmnožiny priestoru X, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$, tak $A = \emptyset$ alebo $B = \emptyset$.
(d) Ak A, B sú ľubovoľné neprázdne podmnožiny priestoru X, pre ktoré $A \cup B = X$, tak $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ alebo $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

5.2 *Dokážte, že ak v priestore X má každý bod súvislé okolie, tak každá komponenta súvislosti v priestore X je otvorená množina a X je topologický súčet svojich komponent súvislosti.*

5.3 *Priestor X nazýva totálne nesúvislý, ak všetky komponenty súvislosti sú jednoprvkové množiny. Dokážte, že každý podpriestor totálne nesúvislého priestoru a topologický súčin totálne nesúvislých priestorov je totálne nesúvislý priestor.*

5.4 *Ukážte, že priestor X nie je homeomorfný s priestorom Y, ak:*
(a) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^n$, $n > 1$.
(b) $X = [0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$.
(c) $X = [0,\ 1], Y = S^1$.
(d) $X = S^1, Y = S^n$, $n > 1$.

5.5 *Nech X je neprázdny topologický priestor. Definujme na X reláciu $\sim$ takto: Ak $a, b \in X$, tak $a \sim b$ práve vtedy, keď existuje súvislá podmnožina A priestoru X taká, že $a, b \in A$. Dokážte, že $\sim$ je relácia evivalencie na X a triedy tejto ekvivalencie sú práve komponenty súvislosti priestoru X.*

5.6 *T_0-priestor X sa nazýva nularozmerný priestor, ak v X existuje báza topológie, pozostávajúca z množín, ktoré sú súčasne otvorené aj uzavreté. Dokážte, že:*
a) Sorgenfreyova priamka a priestor $\mathbb{Q}$ racionálnych čísel s obvyklou topológiou sú nularozmerné priestory.
b) Každý nularozmerný priestor je úplne regulárny T_2-priestor.
c) Každý nularozmerný priestor je totálne nesúvislý.

5.7 *Nájdite príklad totálne nesúvislého prietoru, ktorý nie je nularozmerný.*

5.8 *Dokážte, že každý podpriestor nularozmerného priestoru je nularozmerný priestor a topologický súčin ľubovoľného systému nularozmerných priestorov je nularozmerný priestor.*

6 Konvergencia

6.1 *(a) Zistite, či $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) :\ \mathbb{R} \setminus A$ je spočítateľná$\}$ je filter na $\mathbb{R}$ a ak áno, určite jeho hromadné body a limity v priestore $\mathbb{R}$ s obvyklou topológiou.*
(b) Dokážte, že $\mathcal{F}_2 = \{(a.\ \infty) :\ a \in \mathbb{Q}\}$ je báza filtra na $\mathbb{R}$ a nájdite jej hromadné body a limity v priestore $(\mathbb{R},\ \mathcal{T}_\rightarrow)$, kde $\mathcal{T}_\rightarrow = \{(a, \infty) :\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset,\ \mathbb{R}\}$.

6.2 *Nech $\mathcal{S}$je neprázdny systém filtrov na X. Dokážte, že $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{G} \in \mathcal{S}} \mathcal{G}$ je tiež filter na X.*

6.3 *Nech $A \subseteq X$ a $\mathcal{U}$ je ultrafilter na A. Dokážte, že $\mathcal{F}_\mathcal{U} = \{V \in \mathcal{P}(X) : \exists_{U \in \mathcal{U}}\ U \subseteq V\}$ je ultrafilter na X (t. j. filter na X určený bázou $\mathcal{U}$ je ultrafilter).*

6.4 *Nech X je topologický priestor, $a \in X$ a $\mathcal{F}$ je filter na X. Nech $\mathcal{T}_{a,\mathcal{F}} = \{V \in \mathcal{P}(X) : V \subseteq X \setminus \{a\}$ alebo existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $V = F \cup \{a\}\}$. Dokážte, že $\mathcal{T}_{a,\mathcal{F}}$ je topológia na množine X. Označme X_a priestor na X určený topológiou $\mathcal{T}_{a,\mathcal{F}}$. Dokážte, že $\mathcal{F} \to a$ vtedy a len vtedy, ak $id_X : X_a \longrightarrow X$ je spojité zobrazenie.*

6.5 *Dokážte, že priestor X je T_2-priestor vtedy a len vtedy, ak každá sieť v X má najviac jednu limitu.*

6.6 *Nech $f : X \longrightarrow Y$ je zobrazenie, X, Y sú topologické priestory, $a \in X$. Dokážte, že f je spojité v bode a práve vtedy, keď pre každú sieť $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ takú, že $x_\sigma \to a$ platí $f(x_\sigma) \to f(a)$.*

6.7 *Nech $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ je topologický súčin priestorov, $(x_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ je sieť v X. Dokážte, že $x_\sigma \to a$ v X vtedy a len vtedy, ak pre každé $\alpha \in I$ platí, že $p_\alpha(x_\sigma) \to p_\alpha(a)$ v X_α.*

6.8 *Nájdite príklad postupnosti $(x_n : n \in \mathbb{N})$ na nejakej množine X a podsiete $(y_\sigma : \sigma \in \Sigma)$ tejto postupnosti, ktorá nie je podpostupnosťou.*

6.9 *Nájdite príklad priestoru X, postupnosti $(x_n : n \in \mathbb{N})$ v X, ktorá má hromadný bod a v X a žiadna podpostupnosť postupnosti $(x_n : n \in \mathbb{N})$ nekonverguje k a v X.*

6.10 *Nech $\mathbb{N}^\star$ je jednobodová kompaktifikácia priestoru $\mathbb{N}$ s diskrétnou topológiou, ω je pridaný bod k $\mathbb{N}$. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v topologickom priestore X a $c \in X$. Definujme zobrazenie $f : \mathbb{N}^\star \longrightarrow X$ tak, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ $f(n) = a_n$ a $f(\omega) = c$. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu c v priestore X práve vtedy, keď f je spojité zobrazenie.*

6.11 *Nech A je podpriestor priestoru X, $\mathcal{H}$ je báza filtra na A a $c \in A$. Dokážte, že $\mathcal{H}$ konverguje k c v priestore A práve vtedy, keď $\mathcal{H}$ konverguje k c v priestore X.*

6.12 *Nech $\mathcal{U}$ je ultrafilter na množine X a $f : X \longrightarrow Y$ je surjektívne zobrazenie. Dokážte, že potom $\{f(F) : F \in \mathcal{U}\}$ je ultrafilter na Y.*

6.13 *Dokážte, že priestor X je kompaktný práve vtedy, keď každá sieť v X má hromadný bod.*

6.14 *Nájdite príklad priestoru X, v ktorom každá postupnosť má hromadný bod a X nie je kompaktný.*

6.15 *Nech $\mathcal{S}$ je centrovaný systém na množine X. Dokážte, že existuje filter $\mathcal{F}$ na X aký, že $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ a pre každý filter $\mathcal{G}$ na X, pre ktorý $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}$ platí $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Popíšte prvky filtra $\mathcal{F}$.*

6.16 *Zistite,či platí: Ak $\mathcal{F}$ je filter na množine X a $f : X \longrightarrow Y$ je surjektívne zobrazenie, tak $f(\mathcal{F}) = \{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$ je filter na Y.*

6.17 *Nájdite príklad T_1-priestoru, ktorý nie je T_2-priestorom a v ktorom má každá konvergentná postupnosť práve jednu limitu.*

6.18 *Nech $\mathcal{F}$ je filter na množine X, $A \subseteq X$. Dokážte, že $\mathcal{G} = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ je filter na A, báza filtra na X a pre filter $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ na X generovaný bázou filtra $\mathcal{G}$ platí $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \mathcal{F}$.*