1. Vedia rodičia rozdeliť svoje tri deti do dvoch izieb vo svojom byte tak, aby v každej izbe bolo najviac jedno dieťa?

2. Súkromná knižnica má 1100 zväzkov, pričom žiaden z nich nemá viac ako 1000 strán. Existujú v knižnici dve knihy s rovnakým počtom strán?

3. Na vysokú školu prijali do prvého ročníka 120 študentov, ktorí maturovali na 84 stredných školách. Nájdu sa v prvom ročníku aspoň dvaja študenti, ktorí sa poznajú zo strednej školy?

Veta (Holubníkový princíp, Zásuvkový princíp, Dirichletov princíp)**.** *Predpokladajme, že $n > 0$ je kladné celé číslo a že sme $n + 1$ guličiek (nie nutne rôznych) rozmiestnili do n krabičiek. Potom v aspoň jednej krabičke sú aspoň dve guličky.*

Čo boli v predchádzajúcich príkladoch guličky a čo boli krabičky?

4. Desať manželských párov sa ubytovalo na chate na Popradskom plese a ráno jedenásti z týchto dvadsiatich nastúpili na výlet po trase Ostrvá, Batizovské pleso, Sliezsky dom, Hrebienok a späť. Nájde sa medzi výletníkmi aspoň jeden manželský pár?

5. Na trati dlhej 100 km je 6 benzínových čerpacích staníc. Nájdu sa medzi nimi dve, ktoré nie sú od seba ďalej ako 20 km?

6. Neporiadny študent mal v zásuvke ponožky piatich farieb (z každej farby aspoň dve). Koľko kusov ponožiek musí po tme vybrať, aby bol istý, že medzi nimi budú dve rovnakej farby?

7. Hádžeme dvoma kockami. Koľkokrát treba hodiť, aby sme mali zaručené, že dvakrát padol rovnaký súčet bodov na kockách?

Obyčajne pomocou Dirichletovho princípu dokazujeme existenciu takých objektov, ktoré nemožno (alebo je veľmi ťažké) efektívne skonštruovať.

8. Dokážte, že v Bratislave existujú dvaja ľudia, ktorí majú rovnaký počet vlasov.

   (Ku dňu 31. 12. 2023 mala Bratislava 478 040 obyvateľov. Priemerný človek má 80 000 – 150 000 vlasových folikúl. Predpokladajme, že viac ako 200 000 ich žiaden človek nemá.)

Všeobecnejší prípad:

9. Konferencie sa zúčastnilo 40 delegátov z 13 krajín. Nájde sa krajina, ktorej delegácia mala viac ako troch členov?

Veta (Holubníkový princíp, všeobecná verzia)**.** *Nech n, m, r sú kladné celé čísla a nech $n > r \cdot m$. Predpokladajme, že sme rozdelili n guličiek do m krabičiek. Potom v aspoň jednej krabičke je aspoň $r + 1$ guličiek.*

10. Dokážte, že v skupine 3000 ľudí sú aspoň 9-ti, ktorí majú narodeniny v ten istý deň.

11. Dokážte, že v každom zozname 82 celých čísel sa nájdu dve také, že ich rozdiel je deliteľný číslom 81.

12. V každej spoločnosti aspoň dvoch ľudí sa nájdu dvaja s rovnakým počtom známych (v tejto spoločnosti). Predpokladáme, že ak “Jano pozná Miša”, tak “Mišo pozná Jana” a nikto nie je “známy” sám sebe.

13. Galaxiu Androméda obýva 101 druhov vysoko inteligentných tvorov. Farba očí každého druhu má niektorú z 10 farieb a rovnako, farba vlasov každého druhu má jednu z 10 farieb. Ukážte, že sa nájdu dva druhy s rovnakou farbou očí a aj rovnakou farbou vlasov.

14. Tabuľka 6×6 pozostáva z 36 štvorčekov rozmeru 1×1. Do každého štvorčeka je vpísané jedno z čísel $0,\ 1,\ -1$. Ukážte, že keď sa pozrieme na súčet čísel v každom riadku, na súčet čísel v každom stĺpci a aj na súčet čísel na každej diagonále, tak dva z týchto súčtov budú rovnaké.

15. V miestnosti je 10 ľudí vo veku od 1 do 60 rokov (vek rátame na celé roky). Dokážte, že z týchto ľudí môžeme vybrať dve rovnako staré skupiny (nikto nebude v oboch, ale môžu byť ľudia, ktorí nebudú ani v jednej). Vek skupiny je súčtom vekov jej členov.

16. Dokážte, že pre každé dve nesúdeliteľné celé čísla $a, b > 1$ existujú celé čísla u, v s vlastnosťou $ua + vb = 1$
Pomôcka: Uvažujte zvyšky čísel $b, 2b, \ldots, (a-1)b$ po delení číslom a.

17. Ukážte, že pre každú množinu 10 bodov ležiacich v štvorci, ktorého strany sú dĺžky 3, sú 2 body v množine ktorých vzdialenosť je najviac $\sqrt{2}$.

18. Ak je na štvorci rozmerov 10×10 umiestených 101 bodov, potom možno vybrať taký trojuholník s obsahom 1 cm^2, že na ňom sú aspoň dva spomedzi daných bodov.

19. V záhrade o rozmeroch 80 m $\times$ 90 m rastie 365 stromov. Dá sa nájsť časť záhrady tvaru obdĺžnika o rozmeroch 5 m $\times$ 8 m, na ktorej rastú aspoň 3 stromy?

20. Nech n je prirodzené číslo, ktoré má aspoň 73 dvojciferných deliteľov. Dokážte, že jedným z nich je číslo 60.

21. Ukážte, že ak náhodne zvolíme viac ako polovicu zo všetkých podmnožín n-prvkovej množiny, tak sa medzi nimi nájdu dve také, že jedna je podmnožinou druhej.
Pomôcka: Nech M je n-prvková množina. Stačí uvažovať prípad $n \geq 1$. Zvoľme prvok $a \in M$. Každá podmnožina množiny M buď prvok a obsahuje, alebo ho neobsahuje. Takže podmnožiny množiny M môžeme dať do dvojíc $\{X, X \cup \{a\}\}$. Koľko dvojíc sme utvorili?

22. Dvaja hráči, Modrý a Červený hrajú hru. Jeden nakreslí 6 bodov na papieri tak, aby žiadne tri neležali na tej istej priamke (napríklad vrcholy pravidelného 6-uholníka). Potom sa striedjú v ťahoch, pričom hráč na ťahu spojí 2 body úsečkou svojej farby. Prehrá ten hráč, ktorý prvý vytvorí jednofarebný trojuholník (s vrcholmi v nakreslených bodoch). Ukážte, že hra nemôže skončiť remízou. Ako by to dopadlo pre 5 bodov?

23. Dokážte, že ak z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ vyberieme $n+1$ čísel, tak sa medzi nimi nájdu dve, ktorých rozdiel je 1. Ako by to dopadlo keby sme vybrali n čísel?

24. Majme n prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokážte, že vieme vybrať niekoľko z nich (jedno alebo viacero čísel) tak, že ich súčet je deliteľný číslom n.

25. V štvorci rozmerov 1×1 je umiestnených 23 bodov. Dokážte, že z nich vieme vybrať tri body tak, aby sa dali prikryť kruhom s polomerom $\frac{1}{4}$.

26. V rovine je daných 5 bodov, pričom žiadne tri neležia na tej istej priamke. Potom štyri z nich tvoria vrcholy konvexného štvoruholníka. Dokážte.

27. Spomedzi ľubovoľne zvolených 11 čísel intervalu $(1, 100)$ sa vždy dajú vybrať dve tak, že ich podiel je menší než $1,6$ a väčší než 1. Dokážte.