1. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. (Vedeli by ste nájsť aj iné odvodenie ako matematickou indukciou?)
2. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ platí: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.
3. Odvoďte indukciou vzorec pre výpočet súčtu prvých n členov aritmetickej postupnosti: $\sum_{k=0}^{n} (a+kd) = (n+1)\frac{2a+nd}{2}$. (Inak povedané: Počet členov $\times$ priemer prvého a posledného člena.[1])
4. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
5. Dokážte, že $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ platí pre každé celé číslo $n \geq 2$.
6. Pomocou $n \in \mathbb{N}$ vyjadrite súčet prvých (najmenších) n nepárnych kladných celých čísel (a svoju hypotézu aj dokážte).
7. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí
$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$
8. Dokážte, že
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$$
platí pre ľubovoľné kladné celé číslo n.
9. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí: $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.
10. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$
11. Dokážte, že $n! \geq 2^n$ pre prirodzené čísla $n \geq 4$.
12. Dokážte, že $2^n \geq n^2$ pre prirodzené čísla $n \geq 4$.
13. * Dokážte: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1$. (Hint: Pomôže vhodne upraviť výraz $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Tento výraz by sa mohol vyskytnúť v indukčnom kroku alebo pri použití teleskopickej sumy.)
14. * Dokážte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.
15. * Dokážte, že pre $n \geq 3$ platí $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$. (Inak povedané: Postupnosť $(\sqrt[n]{n})$ je klesajúca.)
16. Dokážte, že pre $n \in \mathbb{N}_0$ a reálne $x \geq -1$ platí $(1+x)^n \geq 1 + nx$. (Brenoulliho nerovnosť)

[1] Takto sa vzorec pre súčet členov aritmetickej postupnosti vcelku ľahko pamätá.

17. Dokážte $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1$. (Návod: Skúste prísť na to, čomu sa rovná suma na ľavej strane a dokázať túto rovnosť indukciou.)

18. V rovine je daný konečný počet rôznych priamok. Tie ju rozdeľujú na niekoľko oblastí. Koľko najmenej farieb potrebujeme na to, aby sme vždy vedeli vyfarbiť všetky oblasti tak, aby každá oblasť bola vyfarbená jednou farbou a aby žiadne dve susedné oblasti (t.j. oblasti oddelené úsečkou, polpriamkou alebo priamkou) neboli vyfarbené rovnakou farbou.

19. V krajine Indukcia je $n \geq 2$ miest, pričom každé dve mestá sú spojené jednosmernou cestou. Nájde sa prechádzka, ktorá začína v jednom meste, končí v inom meste a navštívi každé mesto presne raz? Napríklad pre tri mestá, pomenujme ich A, B, C a spojenie $A \to B$, $A \to C$ a $B \to C$, je $A \to B \to C$ takou prechádzkou.

20. Dokážte, že každé prirodzené číslo $n \geq 2$ má prvočíselného deliteľa.

21. Dokážte, že každé $n \in \mathbb{N}_0$ má binárny zápis. Teda že existujú $c_i \in \{0, 1\}$ také, že (pre vhodné r) platí
$$n = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \ldots + c_2 2^2 + c_1 2^1 + c_0 2^0.$$

22. Majme tabuľku čokolády s $m \times k$ štvorčekmi. Postupne ju budeme lámať na kúsky nasledujúcim spôsobom: v každom kroku si zvolíme kúsok ktorý má aspoň dva štvorčeky a rozlomíme ho podľa vodorovnej alebo zvislej linajky (linajky tvoria štvorčekovú mozaiku čokolády). Skončíme keď je čokoláda polámaná na štvorčeky. Ako dlho nám bude trvať kým čokoládu polámeme?

23. Na koľko oblastí rozdelí rovinu n priamok, ktoré sú všetky navzájom rôznobežné a žiadne tri sa nepretínajú v jednom bode?

24. V tenisovom turnaji hrajú každí dvaja hráči proti sebe presne raz. Keď sa turnaj skončí, každý hráč si napíše na zoznam mená hráčov ktorých porazil a tiež tých, ktorí boli porazení niektorým hráčom ktorého on sám porazil. Indukciou ukážte, že aspoň jeden hráč má na zozname meno každého iného hráča. Potom skúste argument, ktorý indukciu nepoužíva.

25. V rovine je vyznačených $2n$ bodov, $n \geq 2$, pričom žiadne tri neležia na jednej priamke. Ďalej je daných $n^2 + 1$ úsečiek s koncami vo vyznačených bodoch. Ukážte, že existuje trojica bodov, v ktorej sú každé dva spojené úsečkou.

26. Pozorne prečítajte dôkaz nasledujúceho tvrdenia indukciou: Máme n priamok v rovine, pričom žiadne dve nie sú rovnobežné. Potom všetky tieto priamky prechádzajú cez ten istý bod. Dôkaz: Pre $n = 1; 2$ tvrdenie platí. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n priamok a uvažujme množinu $S = \{a, b, c, d, \ldots\}$, $n + 1$ priamok. Zmažme priamku c. Dostaneme množinu $S' = \{a, b, d, \ldots\}$, n priamok. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné preto, podľa indukčného predpokladu, všetky prechádzajú bodom P. Vráťme priamku c a zmažme priamku d. Dostaneme množinu $S'' = \{a, b, c, \ldots\}$, n priamok, žiadne dve nie sú rovnobežné. Opäť podľa indukčného predpokladu, všetky prechádzajú bodom P'. Priamky a, b patria do množiny S' a tiež do S'', preto $P = P'$ a tak c prechádza cez P; zvyšné priamky tiež prechádzajú cez P podľa voľby bodu P. Takže všetky priamky prechádzajú cez bod P. Hm, lenže tvrdenie neplatí. Kde v dôkaze je chyba?

27. Pozorne prečítajte dôkaz nasledujúceho tvrdenia indukciou: „Všetky kone majú tú istú farbu.“ Keďže na svete je konečný počet koní, tvrdenie môžeme vysloviť takto: Pre každé kladné celé číslo n, každých n koní má tú istú farbu. Tu je dôkaz: Pre $n = 1$ tvrdenie platí, lebo jeden kôň má tú istú farbu ako je tá jeho. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n koní, ukážeme že platí

pre $n+1$ koní. Vezmime $n+1$ koní a zoraďme ich do radu. Prvých n koní má tú istú farbu, povedzme čiernu, podľa indukčného predpokladu. Posledných n koní musí mať tiež tú istú farbu, opäť podľa indukčného predpokladu. Takže všetkých $n+1$ koní je čiernych, lebo prvých n koní je čiernych, ako sme videli, a medzi nimi je druhý, tretí, $\ldots$, n-tý kôň a tieto sú medzi poslednými n koňmi. Takto sme ukázali, že všetky kone na svete majú tú istú farbu. Hm, lenže tvrdenie neplatí. Kde v dôkaze je chyba?

28. Fermatove číslo F_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, je definované predpisom $F_n = 2^{2^n} + 1$. Napríklad, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$, $F_5 = 641 \cdot 6700417$. Dokážte platnosť nasledujúcej rovnosti
$$F_0 \cdot F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n-1} = F_n - 2,\ n \geq 1.$$
Pomocou predchádzajúceho ukážte, že ľubovoľné dve Fermatove čísla sú nesúdeliteľné. Odtiaľ, spolu s faktom že Fermatových čísel je nekonečne veľa odvoďte, že prvočísel je nekonečne veľa.

29. V čakárni u lekára je n pacientov. Každý z nich si vezme číslo medzi 1 a n. Predtým ako lekár začal ordinovať, sestrička povedala pacientom, že síce nemusia byť vyšetrení v poradí určenom číslami, ale že pred žiadnym z nich nebude vyšetrených viac pacientov než by bolo keby sa dodržiavalo poradie podľa čísel. Teda pred pacientom s číslom i môže byť vyšetrených nanajvýš $i-1$ pacientov. Keď to počul pán Mrkvička, tak povedal: „Hm, to je to isté ako keby sa poradie podľa čísel rešpektovalo.“ Mal pravdu?

30. Dokážte, že všetky čísla v tvare 12008, 120308, 1203308, … sú deltiteľné číslom 19.

31. * Daných je n štvorcov. Ukážte, že ich možno rozdeliť na časti tak, aby z nich bolo možné zostaviť jediný štvorec.

32. Daná je postupnosť a_1, a_2, a_3, $\ldots$, pre ktorú platí $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ a $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ pre všetky prirodzené $n \geq 3$. Dokážte, že platí $a_n = 2n + 1$.

33. Postupnosť a_1, a_2, a_3, $\ldots$ je definovaná nasledovne: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ a pre každé prirodzené $n \geq 3$ platí $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Dokážte, že platí $a_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.