

1. Vedia rodičia rozdeliť svoje tri deti do dvoch izieb vo svojom byte tak, aby v každej izbe bolo najviac jedno dieťa?
2. Súkromná knižnica má 1100 zväzkov, pričom žiaden z nich nemá viac ako 1000 strán. Existujú v knižnici dve knihy s rovnakým počtom strán?
3. Na vysokú školu prijali do prvého ročníka 120 študentov, ktorí maturovali na 84 stredných školách. Nájdu sa v prvom ročníku aspoň dvaja študenti, ktorí sa poznajú zo strednej školy?

Veta (Holubníkový princíp, Zásuvkový princíp, Dirichletov princíp). *Predpokladajme, že $n > 0$ je kladné celé číslo a že sme $n + 1$ guľičiek (nie nutne rôznych) rozmiestnili do n krabičiek. Potom v aspoň jednej krabičke sú aspoň dve guľičky.*

Čo boli v predchádzajúcich príkladoch guľičky a čo boli krabičky?

4. Desať manželských párov sa ubytovalo na chate na Popradskom plese a ráno jedenásti z týchto dvadsiatich nastúpili na výlet po trase Ostrvá, Batizovské pleso, Sliezsky dom, Hrebienok a späť. Nájde sa medzi výletníkmi aspoň jeden manželský pár?
5. Na trati dlhej 100 km je 6 benzínových čerpacích staníc. Nájdu sa medzi nimi dve, ktoré sú od seba najviac 20 km?
6. Neporiadny študent mal v zásuvke ponožky piatich farieb (z každej farby aspoň dve). Koľko kusov ponožiek musí po tme vybrať, aby bol istý, že medzi nimi budú dve rovnakej farby?
7. Hádzame dvoma kockami. Koľkokrát treba hodiť, aby sme mali zaručené, že dvakrát padol rovnaký súčet bodov na kockách?

Obyčajne pomocou Dirichletovho princípu dokazujeme existenciu takých objektov, ktoré nemožno (alebo je veľmi ťažké) efektívne skonštruovať.

8. Dokážte, že v Bratislave existujú dvaja ľudia, ktorí majú rovnaký počet vlasov.

(Ku dňu 31. 12. 2023 mala Bratislava 478 040 obyvateľov. Priemerný človek má 80 000 – 150 000 vlasových folikul. Predpokladajme, že viac ako 200 000 ich žiaden človek nemá.)

Všeobecnejší prípad:

9. Konferencie sa zúčastnilo 40 delegátov z 13 krajín. Nájde sa krajina, ktorej delegácia mala viac ako troch členov?
10. Hanka má vrečko s veľa žltými, zelenými, modrými, červenými, fialovými a hnedými žetónmi (všetky pomiešané dokopy). Koľko (najmenej) žetónov musí z vrečka vytiahnuť, aby mala istotu, že sa medzi vytiahnutými nájdu 4 žetóny rovnakej farby? Koľko by to bolo ak by chcela mať istotu, že vytiahne 20 žetónov rovnakej farby?

Veta (Holubníkový princíp, všeobecná verzia). *Nech n , m , r sú kladné celé čísla a nech $n > r \cdot m$. Predpokladajme, že sme rozdelili n guľičiek do m krabičiek. Potom v aspoň jednej krabičke je aspoň $r + 1$ guľičiek.*

11. Dokážte, že v skupine 3000 ľudí sú aspoň 9-ti, ktorí majú narodeniny v ten istý deň.
12. Dokážte, že v každom zozname 82 celých čísel sa nájdu dve také, že ich rozdiel je deliteľný číslom 81.

13. Galaxiu Androméda obýva 101 druhov vysoko inteligentných tvorov. Farba očí každého druhu má niektorú z 10 farieb a rovnako, farba vlasov každého druhu má jednu z 10 farieb. Ukážte, že sa nájdú dva druhy s rovnakou farbou očí a aj rovnakou farbou vlasov.
14. V každej spoločnosti aspoň dvoch ľudí sa nájdú dvaja s rovnakým počtom známych (v tejto spoločnosti). Predpokladáme, že ak “Jano pozná Miša”, tak “Mišo pozná Jana” a nikto nie je “známy” sám sebe.
15. V miestnosti je 10 ľudí vo veku od 1 do 60 rokov (vek rátame na celé roky). Dokážte, že z týchto ľudí môžeme vybrať dve rovnako staré skupiny (nikto nebude v oboch, ale môžu byť ľudia, ktorí nebudú ani v jednej). Vek skupiny je súčtom vekov jej členov.
16. Ukážte, že pre každú množinu 10 bodov ležiacich v štvorci, ktorého strany sú dĺžky 3, sú 2 body v množine ktorých vzdialenosť je najviac $\sqrt{2}$.
17. Ak je na štvorci rozmerov 10×10 umiestnených 101 bodov, potom možno vybrať taký trojuholník s obsahom 1 cm^2 , že na ňom sú aspoň dva spomedzi daných bodov.
18. V záhrade tvaru obdĺžnika o rozmeroch $20 \text{ m} \times 15 \text{ m}$ musí byť menej než 26 stromov, ak má byť zachované pravidlo, že vzdialenosť ľubovoľných dvoch stromov je viac ako 5 m. Dokážte.
19. Nech n je prirodzené číslo, ktoré má aspoň 73 dvojčíferných deliteľov. Dokážte, že jedným z nich je číslo 60.
20. Dokážte, že ak z množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ vyberieme $n + 1$ čísel, tak sa medzi nimi nájdú dve, ktorých rozdiel je 1. Ako by to dopadlo keby sme vybrali n čísel?
21. Ukážte, že ak náhodne zvolíme viac ako polovicu zo všetkých podmnožín n -prvkovej množiny, tak sa medzi nimi nájdú dve také, že jedna je podmnožinou druhej.
Pomôcka: Nech M je n -prvková množina. Stačí uvažovať prípad $n \geq 1$. Zvoľme prvok $a \in M$. Každá podmnožina množiny M buď prvok a obsahuje, alebo ho neobsahuje. Takže podmnožiny množiny M môžeme dať do dvojíc $\{X, X \cup \{a\}\}$. Koľko dvojíc sme utvorili?
22. Dvaja hráči, Modrý a Červený hrajú hru. Jeden nakreslí 6 bodov na papieri tak, aby žiadne tri neležali na tej istej priamke (napríklad vrcholy pravidelného 6-uholníka). Potom sa striedajú v ťahoch, pričom hráč na ťahu spojí 2 body úsečkou svojej farby. Prehrá ten hráč, ktorý prvý vytvorí jednofarebný trojuholník (s vrcholmi v nakreslených bodoch). Ukážte, že hra nemôže skončiť remízou. Ako by to dopadlo pre 5 bodov?
23. Majme nejaké prirodzené číslo a , ktoré nie je deliteľné číslom 2 ani číslom 5. Dokážte, že pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ existuje mocnina čísla a , ktorej zápis (v desiatkovej sústave) končí $\underbrace{000 \dots 01}_n$.
24. Šachista má 77 dní na to, aby sa pripravil na turnaj. Každý deň chce zahrať aspoň jednu hru šachu, ale zas nie viac ako 132 hier (za deň). Dokážte, že existuje postupnosť po sebe idúcich hier taká, že za tieto dni šachista zahral spolu presne 21 hier.
Pomôcka: Označme $h_1, h_2, h_3, \dots, h_{77}$ počet hier, ktoré šachista zahral za prvý deň, prvé dva dni (spolu), prvé tri dni atď. Uvažujme čísla $h_1, h_2, \dots, h_{77}$ a tiež $h_1 + 21, h_2 + 21, \dots, h_{77} + 21$.
25. * Majme n prirodzených čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dokážte, že vieme vybrať niekoľko z nich (jedno alebo viacero čísel) tak, že ich súčet je deliteľný číslom n .
26. * V štvorci rozmerov 1×1 je umiestnených 23 bodov. Dokážte, že z nich vieme vybrať tri body tak, aby sa dali prikryť kruhom s polomerom $\frac{1}{4}$.

27. V rovine je daných 5 bodov, pričom žiadne tri neležia na tej istej priamke. Potom štyri z nich tvoria vrcholy konvexného štvoruholníka. Dokážte.
28. * Spomedzi ľubovoľne zvolených 11 čísel intervalu $(1, 100)$ sa vždy dajú vybrať dve tak, že ich podiel je menší než 1,6 a väčší než 1. Dokážte.