Ak nie je povedané inak, tak všetky premenné v nasledujúcich úlohách sú z množiny prirodzených čísel.

1. Letná škola z matematiky má 15 účastníkov. Každý deň sú traja z nich zamestnaní prípravou pomôcok, príkladov atď. Po skončení letnej školy sa zistilo, že každá dvojica študentov bola zamestnaná presne raz (teda presne jeden deň). Koľko dní trvala letná škola?

2. Dokážte, že platí
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

3. Dokážte, že platí
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

4. Dokážte, že platí
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

5. Koľkými spôsobmi môžeme z n ľudí vybrať k tak, aby medzi nimi neboli Danka a Janka naraz? Nájdite aspoň dve vyjadrenia.

6. Kombinatorickou úvahou dokážte
$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$

7. Dokážte, že platí
$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$$

8. Dokážte, že platí
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

9. Dokážte, že platí
$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

10. Dokážte, že platí
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{n}$$

11. Dokážte, že platí
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

12. Kombinatorickou úvahou dokážte, že pre celé číslo $n \geq 1$ a celé kladné číslo x platí
$$(x-1)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = x^n - 1.$$

    Pomôcka: dvomi spôsobmi určte počet takých postupností dĺžky n, ktorých symboly sú z množiny $\{1, 2, \ldots, x\}$, ktoré majú aspoň jednu zložku rôznu od x.

13. Kombinatorickou úvahou dokážte, že platí

$$3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3 = \binom{3n}{3}$$

14. Dokážte, že pre $n, r, s, t \in \mathbb{N}$ platí

$$\binom{n}{r}\binom{r}{t}\binom{n-r}{s-t} = \binom{n}{s}\binom{s}{t}\binom{n-s}{r-t}$$

15. Dokážte, že platí

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

16. Na istom stretnutí si každý podal ruku s niektorými z prítomných (možno nie so všetkými). Ukážte, že keď sčítame počty podaní rúk, ktoré spravili jednotliví ľudia, dostaneme párne číslo.