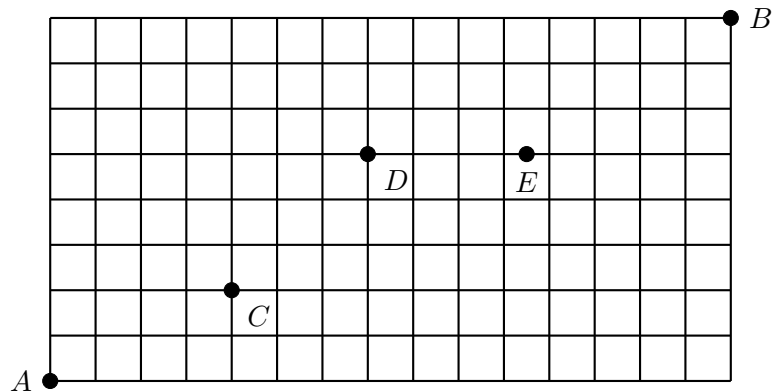


Každá úloha je za 1 bod. (Nie je nutné vyriešiť všetky úlohy. Je na vás, koľko bodov navyše chcete získať.) Riešenia prosím odovzdávajte do 2.1.2025 (vrátane) e-mailom ako 1 súbor PDF.

1. Nech $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ je množina 5 celých čísel. Ukážte, že pre každú permutáciu $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}, a_{i_5}$ čísel z A je hodnota výrazu $(a_{i_1} - a_1)(a_{i_2} - a_2)(a_{i_3} - a_3)(a_{i_4} - a_4)(a_{i_5} - a_5)$ vždy párna¹.
2. Na nasledujúcom obrázku je schematický plán mesta. Koľko je najkratších ciest z bodu A do bodu B , ktoré prechádzajú aspoň jedným z bodov C, D, E ?



3. V triede je 10 chlapcov a 6 dievčat.
 - a) Koľkými spôsobmi ich môže pán učiteľ rozdeliť do dvoch skupín (teda každý bude v nejakej skupine) tak, aby v každej skupine boli aspoň dve dievčatá?
 - b) Koľko zo spôsobov z podúlohy a) je takých, že skupiny sú rovnako veľké?

4. Dokážte, že platí

$$3 \binom{n}{3} + 6n \binom{n}{2} + n^3 = \binom{3n}{3}$$

(Pomôcka naspodu strany²)

5. Koľko rôznych

- a) 6-ciferných čísel existuje takých, že obsahujú iba cifry 1, 2 a 5?
- b) 6-ciferných čísel sa dá zostaviť tým, že vedľa seba poukladáme kartičky s číslami 1, 2, 2, 2, 5 a 5?
- c) príkladov na sčítavanie sa dá zostaviť z kartičiek so symbolmi +, 1, 2, 2, 2, 5 a 5?
- d) príkladov na sčítavanie sa dá zostaviť z kartičiek so symbolmi +, 1, 2, 2, 2, 5 a 5 takých, že výsledok je menší ako 1 000?

¹Napríklad ak zvolíme čísla $a_1 = 5, a_2 = -3, a_3 = 10, a_4 = 1, a_5 = -7$ a spermutujeme ich nasledovne: $a_{i_1} = 1, a_{i_2} = 5, a_{i_3} = -3, a_{i_4} = -7, a_{i_5} = 10$, tak výraz $(a_{i_1} - a_1)(a_{i_2} - a_2)(a_{i_3} - a_3)(a_{i_4} - a_4)(a_{i_5} - a_5) = (5 - 1)(-3 - 5)(10 - (-3))(1 - (-7))(-7 - 10) = 4 \cdot (-8) \cdot 13 \cdot 8 \cdot (-17) = 56576$ je párny.

²Pomôcka: V miestnosti je n žien, n mužov a n detí. Koľkými spôsobmi z nich môžeme vybrať troch?

6. Máme 13 čiernych guľičiek, 6 modrých guľičiek a 20 zelených guľičiek. (Guľičky rovnakej farby sú navzájom nerozlíšiteľné.)
- Koľkými spôsobmi ich vieme rozdeliť do 8 rôznych priehradiek? (Niektoré môžu zostať prázdne.)
 - Koľko zo spôsobov z podúlohy a) je takých, že v prvej priehradke je aspoň 5 čiernych guľičiek a aspoň dve zelené guľičky?
 - Koľko zo spôsobov z podúlohy a) je takých, že v prvej priehradke je najviac 5 čiernych guľičiek a v druhej je najviac 8 zelených guľičiek?
 - Koľko zo spôsobov z podúlohy a) je takých, že v prvej priehradke je najviac 5 zelených guľičiek a v druhej priehradke je najviac 7 zelených guľičiek?