

# Základná forma matematickej indukcie

*Princíp matematickej indukcie:* nech  $X \subseteq \mathbb{N}$  je množina prirodzených čísel taká, že:

- (i)  $0 \in X$ .
- (ii) Pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  platí: ak  $n \in X$ , tak  $n + 1 \in X$ .

Potom  $X = \mathbb{N}$ .

V prípade, že máme danú postupnosť výrokov  $(V(n))_{n \in \mathbb{N}}$ , môžeme za  $X$  zvoliť množinu tých  $n \in \mathbb{N}$ , pre ktoré je výrok  $V(n)$  pravdivý. Ako priamy dôsledok princípu matematickej indukcie tak dostávame nasledujúcu vetu:

**Veta 1.** *Nech  $(V(n))_{n \in \mathbb{N}}$  je postupnosť výrokov taká, že*

- (i) *Výrok  $V(0)$  je pravdivý.*
- (ii) *Pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  platí: ak je pravdivý výrok  $V(n)$ , tak je pravdivý aj výrok  $V(n + 1)$ .*

*Potom je výrok  $V(n)$  pravdivý pre všetky  $n \in \mathbb{N}$ .*

Tvrdenie (i) predchádzajúcej vety sa nazýva *báza indukcie* a tvrdenie (ii) sa nazýva *indukčný krok*.

Princíp matematickej indukcie nemožno dokázať – ide o jednu z tzv. *Peanových axiém*, ktorá je ale ekvivalentná inému pomerne očividnému tvrdeniu, tzv. *vlastnosti dobrého usporiadania množiny  $\mathbb{N}$*  (viď nižšie). Je teda možné chápať princíp matematickej indukcie ako axiómu a vlastnosť dobrého usporiadania množiny  $\mathbb{N}$  ako dôsledok tejto axiómy, alebo naopak.

Často sa stáva, že tvrdenie platí (alebo dáva zmysel) iba pre prirodzené čísla  $n$  väčšie alebo rovné ako nejaké  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Pomocou princípu matematickej indukcie ale možno ľahko dokázať platnosť nasledujúceho variantu vety II:

**Veta 2.** *Nech  $n_0 \in \mathbb{N}$  a  $(V(n))_{n \geq n_0}$  je postupnosť výrokov taká, že*

- (i) *Výrok  $V(n_0)$  je pravdivý.*
- (ii) *Pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  také, že  $n \geq n_0$  platí: ak je pravdivý výrok  $V(n)$ , tak je pravdivý aj výrok  $V(n + 1)$ .*

*Potom je výrok  $V(n)$  pravdivý pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  také, že  $n \geq n_0$ .*

# Silná matematická indukcia

Pri dôkaze indukčného kroku sa pri „bežnej“ matematickej indukcii (podľa vety 1 resp. vety 2) odvodzuje platnosť výroku  $V(n+1)$  len na základe predpokladu platnosti výroku  $V(n)$  – tento predpoklad nazývame *indukčným predpokladom*. Formálne sa teda nemožno odvolávať na platnosť výrokov  $V(j)$  pre  $j < n$ ; indukčným predpokladom je iba platnosť výroku  $V(n)$ .

Lahko možno nahliadnuť, že ide o umelé a čisto formálne obmedzenie. Ak totiž v báze indukcie dokážeme platnosť výroku  $V(n_0)$  a následne dokážeme indukčný krok pre  $n = n_0, \dots, k-1$ , ľahko vidieť, že sú pravdivé *všetky* výroky  $V(n_0), V(n_0+1), \dots, V(k)$ . Pri dôkaze indukčného kroku pre  $n = k$  sa teda môžeme odvolávať aj na platnosť výrokov  $V(j)$  pre  $n_0 \leq j < k$ : ľahko možno dokázať, že záver vety 2 – čiže pravdivosť výroku  $V(n)$  pre všetky prirodzené čísla  $n \geq n_0$  – bude aj v tomto prípade zaručený. Túto myšlienku možno sformalizovať nasledovne:

**Veta 3.** *Nech  $n_0 \in \mathbb{N}$  a  $(V(n))_{n \geq n_0}$  je postupnosť výrokov taká, že*

- (i) Výrok  $V(n_0)$  je pravdivý.*
- (ii) Pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  také, že  $n \geq n_0$  platí: ak sú pravdivé výroky  $V(n_0), V(n_0+1), \dots, V(n)$ , tak je pravdivý aj výrok  $V(n+1)$ .*

*Potom je výrok  $V(n)$  pravdivý pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  také, že  $n \geq n_0$ .*