1-UMA-124 Kombinatorika
(Poznámky k prednáškam)

Martin Sleziak, Jana Tomanová

Obsah

Register **100**

Kapitola 1

Úvod

1.1 Sylaby

Základné kombinatorické princípy, permutácie, variácie a kombinácie, binomické koeficienty a Pascalov trojuholník, binomická a multinomická veta, kombinatorické identity, princíp inklúzie a exklúzie a jeho použitie. Niektoré dôležité číselné postupnosti – Catalanove čísla, Fibonacciho čísla, Stirlingove čísla. Dirichletov princíp, zovšeobecnenia a použitie.

1.2 Literatúra

Použitá literatúra: [AZ, A, Bó, Br, LPV, Ko, Kn, GKP, MN, R, Vil2, Vil1]. Pri príprave týchto poznámok boli užitočné aj viaceré internetové zdroje, ako napríklad [MSE, WIK].

Niektoré cvičenia sú z [A, Bó, G, HS, R, Vil2, Z]. Alebo tiež z internetu, najmä z [MSE].

1.3 Čo je kombinatorika?

Kombinatorika je časť matematiky, ktorú môžeme charakterizovať ako *umenie počítať*. Základnou témou kombinatoriky sú úlohy na počet prvkov konečnej množiny, pričom táto množina je vybavená istou štruktúrou, napríklad usporiadaním. Zaujíma nás, či sa v tejto množine nájde aspoň jedno usporiadanie, ktoré vyhovuje daným požiadavkám. Ak áno, pýtame sa koľko je takýchto usporiadaní.

Úlohy takéhoto typu sa vyskytujú naprieč matematikou, typickým zdrojom je klasická (=diskrétna) teória pravdepodobnosti, tiež informatika, teória čísel, geometria a algebra. Metódy, ktorými riešime kombinatorické úlohy zahŕňajú matematickú indukciu, metódy sita, generujúce funkcie a tiež niekoľko jednoduchých *princípov,* ktoré sú zovšeobecnením našej skúsenosti s počítaním. Napokon, ad–hoc argumenty, ktoré odzrkadľujú mieru pochopenia riešeného problému.

Akým úlohám sa budeme venovať, akým spôsobom budeme pristupovať k ich riešeniu ilustrujeme na niekoľkých nasledujúcich príkladoch.

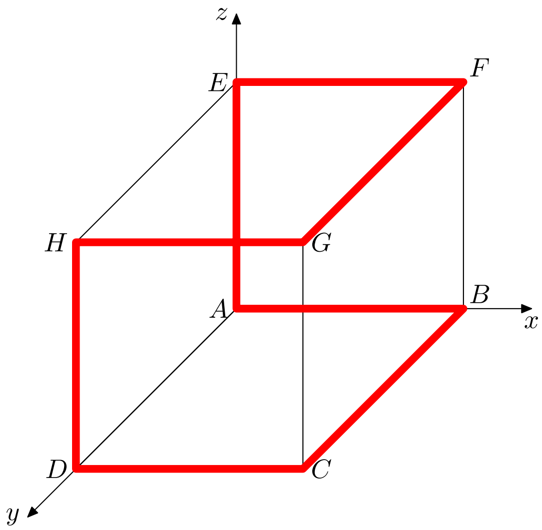
1.3.1 Prechádzka po kocke

Príklad 1.3.1. Budeme uvažovať o kocke. Zaujíma nás, či je možná prechádzka po vrcholoch a hranách kocky, keď požadujeme aby prechádzka začala aj skončila v tom istom vrchole, a každý vrchol navštívila presne raz.

Takú prechádzku nájdeme ľahko, napríklad prechádzka

$$W = A \quad B \quad C \quad D \quad H \quad G \quad F \quad E \quad A$$

je znázornená na obrázku 1.1. Každý vrchol kocky je určený tromi súradnicami (x, y, z), kde $x, y, z \in \{0, 1\}$. Poradie v akom prechádzame vrcholmi kocky sme označili symbolom W.



Obr. 1.1: Prechádzka po kocke

Úlohu z príkladu 1.3.1 zovšeobecníme. Pre celé číslo $n \geq 2$ položme $V = \{(x_1, \ldots, x_n); x_i \in \{0, 1\}\}$ pre všetky i. Kocku Q_n dimenzie n definujeme nasledovne:

- vrcholy: prvky množiny V,
- hrany: dva vrcholy sú spojené hranou ak sa líšia v jedinej súradnici.

Všimnime si, že Q_1 je úsečka, Q_2 je štvorec a Q_3 je štandardná $1 \times 1 \times 1$ kocka. Na obrázku 1.2 sú znázornené kocky Q_2 a Q_3 aj so súradnicami vrcholov vyjadrenými ako dvojice resp. trojice núl a jednotiek.

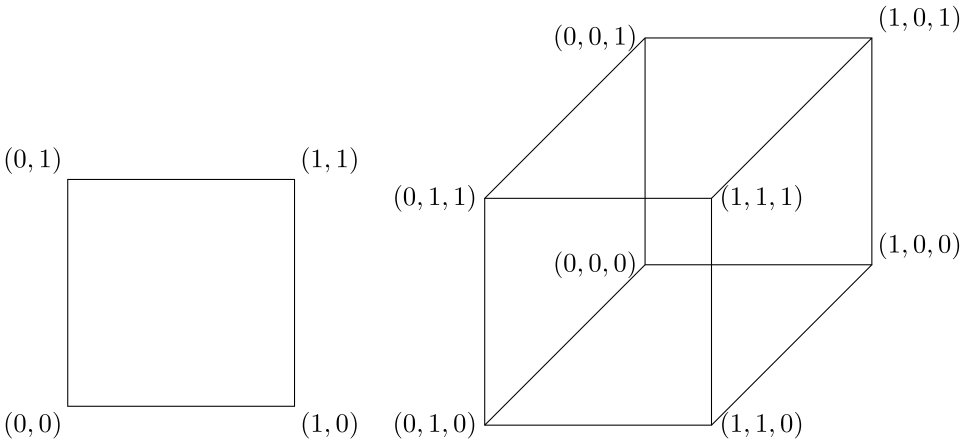
V nasledujúcom budeme kocku Q_n dimenzie n krátko nazývať kocka Q_n.

Príklad 1.3.2. Je možné prejsť sa po vrcholoch a hranách kocky Q_n takým spôsobom, že prechádzka začína a končí v tom istom vrchole a každý vrchol navštívi presne raz?

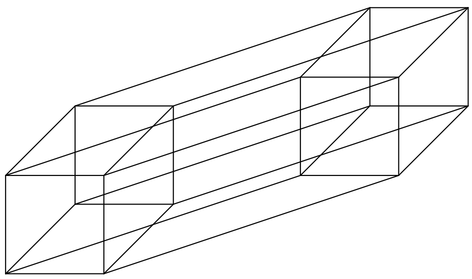
V úlohách s parametrami, v našom prípade s parametrom n, je dobré vyskúšať niekoľko konkrétnych hodnôt parametrov. Začneme s dobre známou kockou Q_3. Vieme, že Q_3 obsahuje dve kópie kocky Q_2. Jedna z nich je na vrcholoch ktoré majú ako tretiu súradnicu nulu t.j. „dolná podstava“, a druhá na tých ktoré majú ako tretiu súradnicu jednotku t.j. „horná podstava“, pozri obrázok1.2.

Nájdu sa v Q_4 dve kópie kocky Q_3? Určite áno, jedna je na vrcholoch ktoré majú na štvrtej súradnici nulu, a druhá na tých ktoré majú na štvrtej súradnici jednotku. Kocka Q_4, zostrojená pomocou kópií Q_3, je znázornená na obrázku 1.3. (Teraz už bez pomenovania vrcholov štvoricami 0 a 1, pretože taký obrázok by bol asi pomerne neprehľadný.) Situácia je analogická pre $n = 5$, $n = 6$, atď.

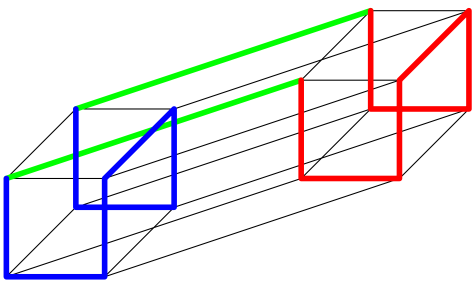
Teraz je už len krok k zisteniu, že prechádzku v kópiách Q_2 je možné rozšíriť na prechádzku v Q_3; prechádzku v kópiách kocky Q_3 je možné rozšíriť na prechádzku v Q_4, atď. Takéto rozšírenie je vidno, pre kocku Q_4, na obrázku1.4.



Obr. 1.2: Kocky Q_2 a Q_3



Obr. 1.3: Kocka Q_4



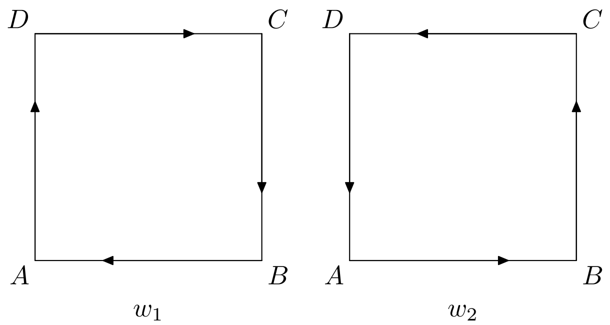
Obr. 1.4: Prechádzka po Q_4

Naše pozorovania nás priviedli k vysloveniu tvrdenia: „Pre každé $n \geq 2$ platí: v Q_n existuje prechádzka požadovanými vlastnosťami.“

Ako sa takéto tvrdenie (alebo aj iné tvrdenia v podobnom duchu, t.j. „Pre každé celé číslo $n \geq k$ platí ...“) dokáže? V matematike máme nástroj, metódu matematickej indukcie, na dôkaz tvrdení tohoto typu. Neskôr existenciu prechádzky pre každé $n \geq 2$ dokážeme.

Keď sme vyriešili problém *existencie* prechádzky, pozrime sa na *počet* prechádzok v Q_n. Začnime s najjednoduchším prípadom.

Prípad $n = 2$.



Obr. 1.5: Dve možné prechádzky po štvorci Q_2

Vidíme, že prechádzky sú buď dve, alebo jedna podľa toho, či prechádzky ktoré sa líšia len poradím v akom vrcholmi prechádzame považujeme za rôzne alebo ich považujeme za rovnaké.

Dohoda: Prechádzky, ktoré sa líšia len smerom v akom prechádzajú vrcholmi, nepovažujeme za rôzne.

Podľa dohody, pre $n = 3$ prechádzky

$$A \quad B \quad C \quad D \quad H \quad G \quad F \quad E \quad A$$

a

$$A \quad E \quad F \quad G \quad H \quad D \quad C \quad B \quad A$$

považujeme za rovnaké. Podobne pre $n = 2$ prechádzky

$$A \quad B \quad C \quad D \text{ a } D \quad C \quad B \quad A$$

Prípad $n = 3$. Všetky možné prechádzky rozdelíme do troch skupín podľa toho, ktoré dve z hrán EA, AB, AD obsahujú.

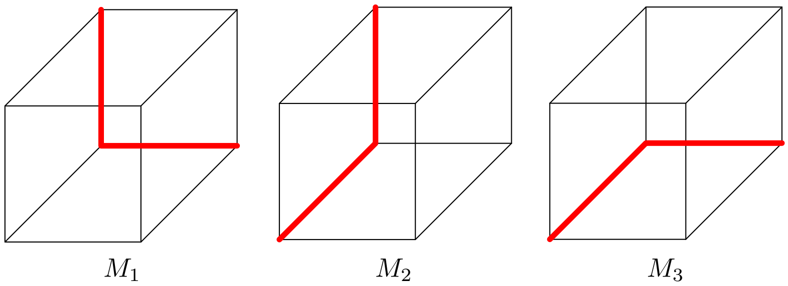
Označme M množinu všetkých hľadaných prechádzok po Q_3, a M_1, M_2, M_3 množinu tých, ktoré obsahujú prvú, druhú resp. tretiu dvojicu hrán z obrázku 1.6. Potom

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3, \text{ pričom } M_i \cap M_j = \emptyset \text{ pre } i \neq j.$$

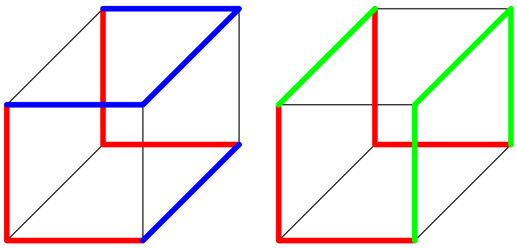
Je jasné (napríklad z Vennovho diagramu), že

$$|M| = |M_1| + |M_2| + |M_3|. \tag{1.1}$$ {01uvod:EQM1M2M3}

Ľahko sa presvedčíte, že $|M_1| = |M_2| = |M_3| = 2$. Prechádzky v množine M_1 sú znázornené na obrázku 1.7.



Obr. 1.6: Možné dvojice hrán vo vrchole A.



Obr. 1.7: Dve prechádzky z M_1

Celkovo, počet prechádzok v Q_3 je

$$|M| = 2 + 2 + 2 = \underline{\underline{6}}.$$

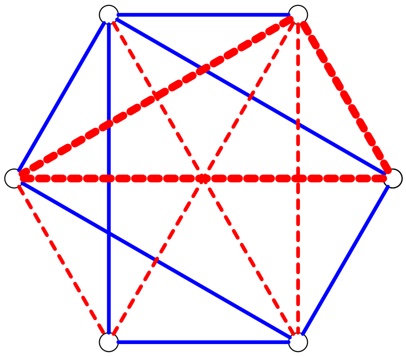
Metóda riešenia, ktorú sme použili: Problém o počte prechádzok sme rozložili na tri navzájom sa vylučujúce podproblémy. To nám umožnila „štruktúra“ kocky, konkrétne fakt, že každý vrchol kocky je koncom troch hrán a tak ľubovoľná prechádzka používa presne jednu dvojicu. Podproblémy sme vyriešili a celkový počet riešení sme určili ako súčet veľkostí množín riešení jednotlivých podproblémov.

Keď je riešenie také ľahké pre $n = 2$ a 3, ako je to s väčšími hodnotami n? Z nasledujúcej tabuľky vidno, že situácia je dramaticky odlišná:

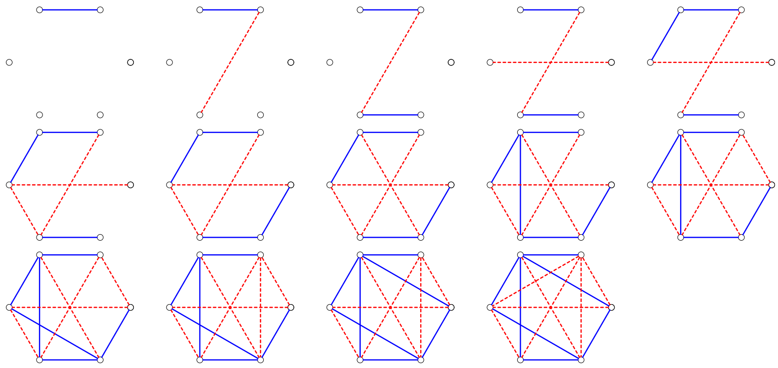
n	počet prechádzok v Q_n	rok
2	1	
3	6	
4	1344	1958
5	906 545 760	2007
6	$\leq 1,50378 \cdot 10^{30}$	2010
7	$\leq 2,51511 \cdot 10^{67}$	2010

Tieto výsledky naznačujú dve veci, typické pre kombinatorické úlohy:

- Problém existencie usporiadania podľa daných pravidiel môže mať jednoduché riešenie, problém určiť počet takýchto usporiadaní môže byť ťažký a niekedy riešenie nie je známe. Inak povedané, počítanie môže byť ťažké.
- Jednoducho formulovaný problém, ktorého zadanie nevyžaduje takmer žiadne znalosti z matematiky, môže byť extrémne ťažký.



Obr. 1.8: V tejto hre červený prehral



Obr. 1.9: Priebeh hry dvoch hráčov

1.3.2 Hra dvoch hráčov

Príklad 1.3.3. Dvaja hráči, Modrý a Červený hrajú hru. Jeden nakreslí na papier 6 bodov, pričom žiadne tri z nich neležia na priamke (napríklad vrcholy pravidelného šesťuholníka). Potom hráči striedavo spájajú dvojice bodov (dosiaľ nespojených), každý svojou farbou. Prehrá ten hráč, ktorý prvý nakreslí jednofarebný trojuholník (s vrcholmi v daných bodoch). Môže sa hra skončiť remízou?

Na obrázku 1.8 je jeden možný výsledok hry. (Priebeh hry je na obrázku 1.9. Červený hráč tu dokonca svojím posledným ťahom vytvoril dva jednofarebné trojuhoníky.)

Keďže nakresliť môžeme nanajvýš 15 čiar, každá hra sa nutne skončí. Ale môže skončiť tak, že šesť bodov je navzájom pospájaných (v súlade s pravidlami hry), a predsa sa tu nenájde jednofarebný trojuholník? Keby ste hrali túto hru s kamarátom, nikdy by remíza nenastala.

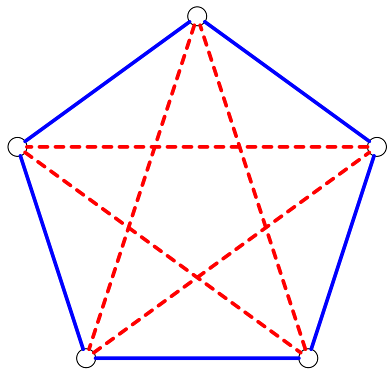
To vedie k tvrdeniu: „Hra dvoch hráčov na 6 bodoch nemôže skončiť remízou.“

Ako toto tvrdenie dokázať, respektíve vyvrátiť? Jedna z možností spočíva v preverení všetkých $2^{15} = 32\,768$ ofarbení pätnástich hrán modrou alebo červenou farbou. Pokiaľ sa v každom z nich nájde jednofarebný trojuholník, tvrdenie sme dokázali. V opačnom prípade sme tvrdenie vyvrátili.

Skúsme iný prístup. Budeme postupovať nepriamo. Predpokladajme, že aspoň jedna hra sa skončila remízou. Pozrime sa, čo vieme o tejto hre povedať. Zvoľme si jeden z daných šiestich bodov, ľuboľne, a nazvime ho A. Zvyšné pomenujme B, C, D, E, F. Bod A je spojený s každým zo zvyšných bodov buď červenou čiarou, alebo modrou čiarou. Kľúčové pozorovanie je, že aspoň tri z týchto čiar majú rovnakú farbu (v opačnom prípade by sme mali nanajvýš štyri čiary). Nech napríklad AB, AC, AD sú červené čiary. Nastane jedna z možností: aspoň dva body spomedzi B, C, D sú spojené červenou farbou, napríklad B, C alebo žiadne dva z nich nie sú spojené červenou farbou. V prvom prípade máme červený trojuholník ABC a teda spor s predpokladom, v druhom modrý trojuholník BCD čo je opäť spor s predpokladom. Preto v žiadnej hre nemôže dôjsť k remíze.

Pozorovanie na ktorom sme dôkaz založili je špeciálnym prípadom princípu (ktorý asi poznáte) s názvom zásuvkový princíp, alebo holubníkový princíp, alebo aj Dirichletov princíp. Napriek svojej jednoduchosti, umožňuje dokázať vskutku pozoruhodné výsledky, viac si povieme v kapitole 2.

V úvahách budeme ešte chvíľu pokračovať. Je jasné, že remíza nenastane, keď hru budeme hrať na viac ako šiestich vrcholoch. Na piatich vrcholoch remíza môže nastať, ako vidno obrázku 1.10.



Obr. 1.10: Hra skončila remízou

Celkovo sme ukázali platnosť tvrdenia: „Číslo 6 je najmenšie také číslo, že hra dvoch hráčov na n bodoch nemôže skončiť remízou.“

Hru dvoch hráčov môžeme zovšeobecniť nasledovne: prehrá ten hráč, ktorý pospája navzájom 4 body svojou farbou. Dá sa ukázať, že k tomu aby hra neskončila remízou stačí hrať na 18 bodoch a remíza je možná keď hráme na 17 bodoch. Ďalšie zovšeobecnenie je už asi zrejmé: prehrá ten hráč, ktorý navzájom pospája 5 bodov svojou farbou. Dá sa ukázať, že k tomu aby hra neskončila remízou stačí hrať na 49 bodoch a remíza je možná keď hráme na 42 bodoch. Najnovčí výsledok autorov Vigleik Angeltveit a Brendan D. McKay z roku 2017 zlepšuje hranicu 49 o 1, t.j. na 48. Otvorená zostáva naďalej otázka najmenšieho počtu bodov na ktorom hra neskončí remízou. Neskôr, v kapitole 8 sa budeme hre dvoch hráčov venovať podrobnejšie.

1.3.3 Vianočný večierok

Príklad 1.3.4 (Vianočný večierok)**.** Vo firme sa rozhodli usporiadať vianočný večierok a dohodli sa, že každý prinesie darček. Keď sa všetci zvítali a porozprávali, tak každý si vzal spod stromčeka daček. Keď si darčeky rozbalili a potešili as s nimi, Ferko Mrkvička povedal:

Hm, nikto z nás si nevzal „svoj“ darček. A pretože rád počíta, rovno spočítal pravdepodobnosť takejto udalosti. K akému výsledku prišiel?

Diskusia. Uvažujme večierok troch ľudí, povedzme Jano, Zuzka, Anna, a darčeky, ktoré priniesli, pomenujme rovnako, teda Janov darček pomenuje Jano, Zuzkin pomenujme Zuzka a Annin pomenujme Anna. Keď zvolíme *pevné* poradie Jano, Zuzka, Anna, tak všetky možnosti ako si mohli rozdeliť darčeky sú:

$$\begin{array}{ccc} J & Z & A \\ J & A & Z \\ Z & J & A \\ Z & A & J \\ A & J & Z \\ A & Z & J \end{array}$$

a dve z nich: $Z \quad A \quad J$, $A \quad J \quad Z$, odpovedajú situácii, keď nikto nemá darček, ktorý sám priniesol. Hľadaná pravdepodobnosť je potom $2/6 = 1/3 = 0,333\ldots$.

Všeobecne, pre celé číslo $n \geq 1$ označme:

- D_n = počet takých poradí čísel $1, 2, \ldots, n$, že žiadne číslo nie je na svojom prirodzenom mieste.
- Per_n = počet všetkých poradí čísel $1, 2, \ldots, n$.

Potom hľadaná pravdepodobnosť je $\dfrac{D_n}{Per_n}$.

Akú hodnotu nadobúda D_n pre $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$? Podobným spôsobom ako sme riešili príklad 1.3.1 o *počte* prechádzok v Q_3 možno odvodiť

$$D_{n+1} = n(D_{n-1} + D_n), \qquad D_1 = 0, D_2 = 1, \tag{1.2}$$ {01uvod:EQDERR1}

t.j. rekurentný vzťah, z ktorého môžeme určiť hodnotu D_n, $n \geq 3$, ak už poznáme všetky predchádzajúce hodnoty.

Na druhej strane, $D_1 = 0$ a $D_2 = 1$ dáva

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right), \tag{1.3}$$ {01uvod:EQDERR2}

čo možno odvodiť z (1.2) matematickou indukciou, alebo metódou sita. V priebehu semestra (1.2) a (1.3) odvodíme (pozri časť 7.2.4).

Čo budeme považovať za známe: V princípe, elementárne poznatky z teórie množín, predovšetkým vzťahy medzi množinami a operáciami s množinami. Tieto „veci“ poznáte zo strednej školy, zopakujeme potrebné na cvičeniach. Poznatky z teórie deliteľnosti, ako napríklad spoločný deliteľ, najväčší spoločný deliteľ.

1.4 Niektoré označenia

Označenia, ktoré budeme často používať:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ = množina prirodzených čísel

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ = množina celých čísel

$\mathbb{Q}$ = množina racionálnych čísel
$\mathbb{R}$ = množina racionálnych čísel

Budeme používať takýto zápis pre súčet a súčin n prvkov:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

Napríklad

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Teda tento zápis vyjadruje sumu pozostávajúcu z n sčítancov tvaru $\frac{1}{i}$, kde za i postupne dosadzujeme čísla od 1 po n.

Takisto sa bude vyskytovať podobný zápis pre prienik či zjednotenie konečného počtu množín:

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i = M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n$$

Cvičenia

Kapitola 2

Existencia

2.1 Holubníkový princíp

Budeme hovoriť o „zásuvkovom“, alebo „holubníkovom“ princípe. V najjednoduchšej podobe tento princíp hovorí: „Keď máme viac guličiek ako krabičiek a guličky sme rozdelili do krabičiek, tak v niektorej krabičke je viac než jedna gulička.“ O chvíľu uvidíme, že napriek svojej jednoduchosti (a priznajme, samozrejmosti) už v tejto jednoduchej podobe princíp umožňuje odvodiť zaujímavé tvrdenia.

Veta 2.1.1 (Holubníkový princíp, Zásuvkový princíp, Dirichletov princíp)**.** *Predpokladajme, že $n > 0$ je celé číslo a že sme $n + 1$ guličiek (nie nutne rôznych) rozmiestnili do n krabičiek. Potom v aspoň jednej krabičke sú aspoň dve guličky.*

Dôkaz. Postupujme nepriamo. Prepokladajme, že v každej krabičke je naviac jedna gulička. Potom máme nanajvýš n guličiek v n krabičkách, čo je spor s predpokladom, že sme do krabičiek dali $n + 1$ guličiek. □

Teraz odvodíme pomocou holubníkového princípu niekoľko sľúbených zaujímavých tvrdení.

Príklad 2.1.2. V postupnosti $1, 11, 111, 1111, \dots$ sa nájde číslo deliteľné číslom 2003.

Riešenie. Ukážeme viac než sa vyžaduje., totiž že medzi prvými 2003 číslami tejto postupnosti sa nájde číslo deliteľné 2003. Postupujme sporom, teda predpokladajme opak.

Potom zvyšok po delení každého z týchto čísel je presne jedno z čísel medzi 1 až 2002. Máme teda 2003 zvyškov (jeden pre každé z 2002 čísel) a len 2002 možných hodnôt. Teraz môžeme aplikovať holubníkový princíp:

- $r_1 \dots r_{2003}$ sú zvyšky = guličky
- $1, 2, \dots, 2002$ možné hodnoty zvyškov = krabičky

Potom sa nájdu dva zvyšky, ktoré sú v tej istej krabičke, inak povedané i-ty a j-ty prvok našej postupnosti a_i a a_j, $1 \le i < j \le 2003$, majú ten istý zvyšok r, $1 \le r \le 2003$. Preto

$$a_i = k_i 2003 + r$$
$$a_j = k_j 2003 + r$$

a tak

$$a_j - a_i = (k_j - k_i)2003 \qquad (2.1)$$ {02holub:EQ2003_1}

Tým sme ukázali, že 2003 delí $a_j - a_i$. Odtiaľ je už len krok k požadovanému výsledku. Pozrime sa na rozdiel $a_j - a_i$.

$$\begin{array}{rr} 11111111 & j \text{ jednotiek} \\ - \quad 1111 & i \text{ jednotiek} \\ \hline 11110000 & j-i \text{ jednotiek a } i \text{ núl} \end{array}$$

Takže

{02holub:EQ2003_2}
$$2003 \mid a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i. \tag{2.2}$$

Keďže 10^i a 2003 sú nesúdeliteľné, z (2.1) a (2.2) dostávame, že 2003 delí $a_j - a_i$. □

Uvedený príklad sa dá vcelku ľahko zovšeobecniť. Vidíme napríklad, že to isté tvrdenie by platilo, ak by sme namiesto 2003 zobrali ľubovoľné číslo n nesúdeliteľné s 10^i. Mohli by sme riešiť podobnú úlohu aj pre iné postupnosti podnobného typu, ako napríklad $2, 22, 222, 2222, \ldots$

Príklad 2.1.3. Uvažujme šachový turnaj n hráčov, pričom každý hráč hrá proti každému inému hráčovi. Tvrdíme, že v každom okamihu turnaja sa nájdu dvaja hráči, ktorý odohrali ten istý počet hier.

Riešenie. Počet možných odohraných hier pre jedného hráča budú krabičky. Teda $0, 1, \ldots, n-1$ sú krabičky a hráči „budú guličky“ teda n guličiek.

Teraz máme problém, totiž rovnaký problém karabičiek aj guličiek a holubníkový princíp nevieme použiť.

Pri našej úvahe sme však „nezohľadnili“ jednu vec – totiž, že každý hráč hrá s každým iným hráčom. Keby sa v danom okamhu našiel hráč, ktorý odohral všetkých $n-1$ hier, tak hral s každým iným hráčom, a teda každý hráč odorhal aspoň jednu hru. Preto $\underline{0}$ a $\underline{n-1}$ oddohraných hier nemôže nastať súčasne. Preto počet odohraných hier v každom okamihu turnaja pre každé ho hráča je $n-1$ a holubníkový princíp môžeme aplikovať. □

Poznámka 2.1.4. Všimnime si, že ak miesto $n+1$ guličiek do n krabičiek rozdelíme $2n+1$ guličiek, tak v aspoň jednej krabičke budú aspoň 3 guličky. Podobne keď rozdelíme $3n+1$ guližiek, v niektorej krabičke budú aspoň 4 guličky, atď.

Vo všeobecnosti dostávame nasledujúce všeobecné tvrdenie.

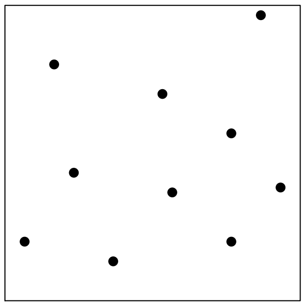
Veta 2.1.5 (Holubníkový princíp, všeobecná verzia)**.** *nech n, m, r sú kladné celé čísla a nech $n > r \cdot m$. Predpokladajme, že sme rozdelili n guličiek do m krabičiek. Potom v aspoň jednej krabičke je aspoň $r+1$ guličiek.*

Dôkaz. Postupujme sporom, nech teda v každej krabičke je naviac r guličiek. Potom celkovo máme najviac $r \cdot m < n$ guličiek v krabičkách, čo js spor s tým, že sme rozdelili n guličiek. □

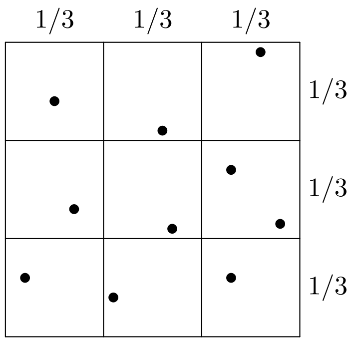
Príklad 2.1.6. Majme desať bodov rozmiestnených vo štvorci so stranou 1. Potom dva z týchto bodov sú vo vzdialenosti menšej ako $0,48$ a tri z nich sú v kruhu o polomere $0,5$.

Riešenie. Štvorec rozdeľme kolmicami na 9 rovnakých štvorcov. Máme 10 bodov (guličky) a 9 štvorcov (krabičky), podľa vety 2.1.1 musia byť dva body v niektorom z malých štvorcov. Maximálna vzdialenosť vo štvorci sa dosahuje medzi vrcholmi na uhlopriečke a tá je rovná[1]

$$\frac{\sqrt{2}}{3} < 0,471405 < 0,48.$$



Obr. 2.1: Desať bodov rozmiestnených vo štvorci



Obr. 2.2: Niektoré dva body musia byť v tom istom malom štvorci

Dôkaz druhej časti tvrdenia: Štvorec rozdelíme uhlopriečkami na štyri rovnaké trojuholníky (obrázok 2.3). Podľa vety 2.1.5 aspoň jeden z týchto trojuholníkov obsahuje tri z daných bodov. Opísaná kružnica takému trojuholníku má polomer $0,5$. □

Poznámka 2.1.7. Najťažšou časťou úlohy bolo zrejme prísť na vhodné rozdelenie štvorca na potrebný počet častí. Podobné geometrické úlohy sú aj medzi cvičeniami. (Úlohy 2.4.20, 2.4.21, 2.4.22, 2.4.23, 2.4.24, 2.4.26.) Nájsť vhodné rozdelenie geometrického útvaru, s ktorým pracujeme, nemusí byť vždy jednoduché.

2.2 Erdös-Szekeresova veta

Na záver ukážeme Erdös-Szekeresovu vetu.

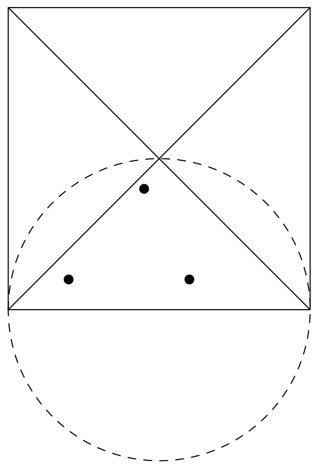
Veta 2.2.1 (Erdös-Szekeresova). *V každej postupnosti $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ navzájom rôznych reálnych čísel sa nájde rastúca podpostupnosť*

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{m+1}} \qquad (i_1 < i_2 < \cdots < i_{m+1})$$

dĺžky $m+1$ alebo klesajúca podpostupnosť

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}} \qquad (j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1})$$

[1]Aj bez použitia kalkulačky sme schopní urobiť aspoň odhad $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1,5}{3} = 0,5$. Ten však pri tomto zadaní nestačí; potrebujeme sa dostať pod $0,48$.



Obr. 2.3: Rozdelenie štvorca na 4 časti

dĺžky $n+1$*, alebo obidve.*

Možno sa nám oplatí vyskúšať aspoň nejaký veľmi malý príklad, povedzme pre $m = n = 2$.

Príklad 2.2.2. Ak usporiadame čísla $1, 2, \ldots, 5$ ľubovoľným spôsobom, tak podľa predchádzajúcej vety musíme nájsť monotónnu podpostupnosť dĺžky 3. Môžete si vyskúšať niekoľko rôznych usporiadaní (zrejme nebudete skúšať všetkých $5! = 120$). Tu je zopár príkladov, je tam zvýraznená niektorá monotónna podpostupnosť dĺžky tri (môže ich byť viac).

1	**2**	**3**	4	5
1	5	**3**	**4**	2
3	**5**	**4**	**1**	2
3	**1**	**2**	**5**	4
3	1	**5**	**4**	**2**
4	1	**3**	5	**2**

Dôkaz. Pre každé a_i nech t_i je dĺžka *najdlhšej* rastúcej podpostupnosti, ktorá začína v a_i. Ak $t_i \geq m+1$ pre nejaké i, tak v a_i začína rastúca podpostupnosť dĺžky $m+1$.

Nech teda $t_i \leq m$ pre $i = 1, 2 \ldots, mn+1$. Teda môžeme aplikovať vetu 2.1.5:

- krabičky = čísla $1, 2, \ldots, m$;
- guličky = $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$, t.j. členy postupnosti.

Číslo a_i dáme do krabičky j, ak dĺžka najdlhšej rastúcej podpostupnosti začínajúcej v a_i je $t_i = j$. Podľa vety 2.1.5, v aspoň jednej krabičke, povedzme s, je aspoň $n+1$ guličiek, povedzme guličky

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{n+1}}, \qquad (j_1 < j_2 < \cdots < j_{n+1}).$$

Uvážme dve po sebe idúce čísla a_{j_i} a a_{j+1}. Keďže tieto čísla sú rôzne, nastane jedna z možností

$$a_{j_i} < a_{j_{i+1}} \qquad a_{j_i} > a_{j_{i+1}}.$$

Keby nastala prvá možnosť $a_{j_i} < a_{j_{i+1}}$, tak v $a_{j_{i+1}}$ začína rastúca podpostupnosť dĺžky s. Ak na začiatok tejto podpostupnosti pridáme a_{j_i}, tak dostaneme rastúcu podpostupnosť dĺžky $s+1$, čo je spor s tým, že a_{j_i} je v krabičke s.

Preto nastane druhá možnosť, t.j. pre ľubovoľné dve po sebe idúce čísla z tejto krabičky máme $a_{j_i} > a_{j_{i+1}}$, čo dáva

$$a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{n+1}}$$

klesajúcu postupnosť dĺžky $n + 1$. □

Príklad 2.2.3. Pre ilustráciu príkladu uvážme konkrétny príklad. Nech

$$13 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 12 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 11 \quad 10 \quad 9$$

je daná postupnosť dĺžky $3 \cdot 4 + 1 = 13$. Veta 2.2.2 nám hovorí, že by sme mali nájsť rastúcu postupnosť dĺžky aspoň 4 alebo klesajúcu postupnosť dĺžky aspoň 5.

Ak zistíme aké sú dĺžky rastúcich podpostupností začínajúcich na jednotlivých pozíciách, tak dostaneme

a_i	13	4	3	2	1	12	8	7	6	5	11	10	9
t_i	1	3	3	3	3	1	2	2	2	2	1	1	1

Máme $t_i \leq 3$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, 13$. (Teda v tejto postupnosti nie je rastúca podpostunosť dĺžky 4.)

Máme $t_1 = t_6 = t_{11} = t_{12} = t_{13} = 1$ a odpovedajúce a_i, t.j. 13, 12, 11, 10, 9 tvoria klesajúcu podpostupnosť dĺžky 5.

Môžeme si všimnúť, že aj keď vezmeme členy, pre ktoré platí $t_i = 2$ a tie, pre ktoré platí $t_i = 3$, tak dostaneme klesajúce postupnosti. Tie sú však kratšie.

Príklad 2.2.4. Môžeme si to isté vyskúšať aj pre niektoré postupnosti dĺžky 5 z príkladu 2.2.2. Opäť si môžete všimnúť, že na pozíciách s rovnakými hodnotami t_i dostaneme klesajúcu postupnosť.

a_i	3	5	4	1	2
t_i	2	1	1	2	1

a_i	3	1	5	4	2
t_i	2	2	1	1	1

a_i	4	1	3	5	2
t_i	2	3	2	1	1

Úloha 2.2.1. Ukážte, že výsledok je najlepší možný, t.j. zostrojte postupnosť navzájom rôznych $m \cdot n$ čísel, ktorá neobsahuje rastúcu postupnosť dĺžky $m + 1$ a neobsahuje klesajúcu podpostupnosť dĺžky $n + 1$. (Hint: Čísla 1 až $m \cdot n$ dajte do n blokov, každý s m číslami.)

2.3 Diskusia

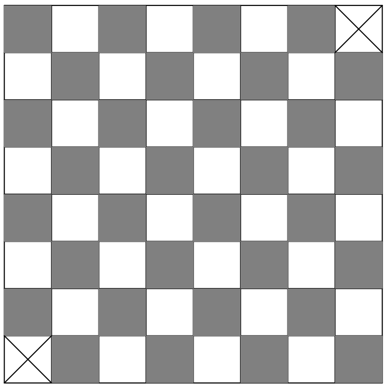
Ako zistíme, že problém, ktorý máme riešiť je možné riešiť pomocou holubníkového princípu? Môžu nám pomôcť: povaha problému, premýšľanie nad úlohou, metóda pokusov a omylov. Vystihnúť, čo by mohlo hrať úlohu krabičiek, a čo úlohu guličiek. Krabičky – odpovedajú vlstnosti riešenia, guličky – odpovedajú objektom, o ktorých chceme ukázať, že sa nájde medzi nimi taký objekt, ktorý spĺňa požadovanú vlastnosť. Keď máme definovaných viac guličiek ako krabičiek, treba definovať pravidlo, podľa ktorého rozdlelíme guličky do krabičiek. Keďže holubníkový princíp platí pre *ľubovoľné* pravidlo, platí aj pre nami definované a môžeme ho aplikovať.

2.4 Cvičenia

Úloha 2.4.1. Ukážte, že medzi ľubovoľnými šiestimi celými číslami existujú dve, ktorých rozdiel je násobok čísla 5.

Všeobecnejšie: Medzi ľubovoľnými $n+1$ číslami existujú dve, také, že n delí ich rozdiel.

Úloha 2.4.2. Na šachovnici (obvyklých rozmerov 8×8) sú vyrezané dva koncové rohy hlavnej diagonály. Je možné šachovnicu pokryť dominom tak, aby každé domino pokrývalo presne dve polia a žiadne dve dominá sa neprekrývali?[2] Ako by sa zmenilo riešenie, keby sme uvažovali šachovnicu rozmerov $n \times n$, kde n je nejaké prirodzené číslo?



Úloha 2.4.3. Na pomaranči je vyznačených päť bodov. Je možné prekrojiť pomaranč tak, aby štyri z vyznačených bodov ležali na tej istej „pologuli“ (Predpokladáme, že vyznačený bod ktorým prechádza rez patrí obom častiam pomaranča.)

Úloha 2.4.4. V každej spoločnosti aspoň dvoch ľudí sa nájdu dvaja s rovnakým počtom známych (v tejto spoločnosti). (Predpokladáme, že ak „Jano pozná Miša“, tak „Mišo pozná Jana“ a nikto nie je „známy“ sám sebe.)

Úloha 2.4.5. Sedemnásť vedcov si navzájom dopisuje o troch témach. Dokážte, že aspoň traja z nich si píšu o tej istej téme.

Úloha 2.4.6*. Ako sa zmení výsledok predošlej úlohy, ak číslo 17 nahradíme číslom 16?

Úloha 2.4.7. V miestnosti je 10 ľudí vo veku medzi 1 až 60 rokov (vek rátame na celé roky). Dokážte, že spomedzi nich môžeme vybrať dve rovnako staré skupiny (nikto nebude v oboch, skupiny sú neprázdne). Vek skupiny je súčtom vekov jej členov.

Úloha 2.4.8. Majme ľubovoľnú množinu desiatich dvojciferných čísel. (T.j. 10-prvkovú podmnožinu $\{10, 11, \ldots, 98, 99\}$.) Ukážte, že sa dajú vybrať dve disjunktné podmnožiny, ktorých prvky dávajú ten istý súčet.[3]

Úloha 2.4.9. Do skúšky vám zostáva 37 dní. Viete, že stačí ak budete študovať 60 hodín (čistého času). Aby toho nezostalo veľa na poslednú chvíľu, rozhodli ste sa študovať aspoň 1 hodinu denne. Dokážte, že nech zvolíte akýkoľvek postup pre štúdium v rámci týchto

[2] Tento problém je pomerne známy: `https://en.wikipedia.org/wiki/Mutilated_chessboard_problem`
[3] Úloha z IMO 1972.

pravidiel, nájde sa taká postupnosť po sebe idúcich dní, že počas nich budete študovať spolu presne 13 hodín. Predpokladáme, že dĺžka štúdia v jeden deň je daná v celých hodinách. (Hint: Konzultujte skriptá [Kn, Kapitola 1.1, Príklad 3].)

Úloha 2.4.10. Tenista má tri týždne na prípravu na turnaj. Rozhodol sa počas prípravy odohrať každý deň so svojím sparing-partnerom aspoň jeden set, celkovo však najviac 36 setov počas celej prípravu. Dokážte, že ak splní tieto podmienky, tak sa dá nájsť niekoľko po sebe idúcich dní, počas ktorých odohral práve 21 setov.

Úloha 2.4.11. Ak je daných 52 celých čísel, tak sa z nich dajú vybrať dve, ktorých súčet alebo rozdiel je deliteľný 100.

Úloha 2.4.12. Vojaci pochodujú v m radoch, pričom v každom rade je n vojakov. V každom rade sú zoradení zľava do prava od najnižsieho po najvyššieho. Veliteľ sa rozhodol, že chce takto usporiadať aj zástupy tak, že každý zástup preusporiada. (Teda zloženie zástupov sa nezmení, zmení sa v nich len poradie.) Keď skončí, tak je každý zástup zoradený spredu dozadu od najnižsieho po najvyššieho. Dokážte, že rady si zachovajú svoj „rastúci“ charakter zľava do prava.

Úloha 2.4.13. Dokážte, že ak z množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ vyberieme $n + 1$ čísel, tak sa medzi nimi nájdu dve, ktorých rozdiel je 1. Ako by to dopadlo keby sme vybrali n čísel?

Úloha 2.4.14. Dokážte, že ak z množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ vyberieme $n + 1$ čísel, tak sa medzi nimi nájdu dve také, že jedno delí druhé. Ako by to dopadlo keby sme vybrali n čísel? (Môže vám pomôcť využiť fakt, že každé prirodzené číslo sa dá napísať v tvare $2^p q$, kde q je nepárne. T.j. ako súčin mocniny dvojky a nepárneho čísla.)[4]

Úloha 2.4.15. Dokážte, že ak z množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ vyberieme $n + 1$ čísel, tak sa medzi nimi nájdu dve čísla, ktoré sú nesúdeliteľné.

Úloha 2.4.16. Máme 174 účastníkov konferencie o životnom prostredí. Potom sa nájdu štyria z nich, ktorí majú narodeniny v priebehu jedného týždňa.

Úloha 2.4.17. Ukážte, že ak a, b, c sú celé čísla, tak súčin $(a - b)(a - c)(b - c)$ vždy bude párne číslo.

Úloha 2.4.18. Dokážte: Ak z množiny $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ vyberieme šesť navzájom rôznych čísel, tak medzi nimi učite budú dve čísla, ktorých súčet je 15.

Úloha 2.4.19. Daná je množina $\{1, 2, \dots, n\}$. Aký je maximálny počet jej podmnožín takých, že žiadne dve z nich nie sú disjunktné (teda ľubovoľné dve z nich majú neprázdny prienik)?

Úloha 2.4.20. Dokážte: Ak máme päť bodov vo štvorci so stranou 2, tak sa medzi nimi dajú nájsť dva rôzne body, ktorých vzdialenosť je nanajvýš $\sqrt{2}$.

Dá sa číslo $\sqrt{2}$ nahradiť menším tak, aby stále platilo uvedené tvrdenie?

Úloha 2.4.21. Ak v rovnostrannom trojuholníku so stranou dĺžky 1 nakreslíme ľubovoľným spôsobom 10 bodov, tak niektoré dva z nich budú vo vzdialenosti najviac 1/3.

Úloha 2.4.22. Ak v rovnostrannom trojuholníku so stranou dĺžky 1 nakreslíme ľubovoľným spôsobom 5 bodov, tak niektoré dva z nich budú vo vzdialenosti najviac 1/2.

[4] Tento problém pochádza od Paula Erdösa. Objavil sa aj ako jedna z úloh na Putnamovej súťaži v roku 1958. Ide o americkú matematickú súťaž pre vysokoškolákov. Pozri tiež [GGK, p. 489], [Z, Example 3.3.7].

Úloha 2.4.23. V rovnostrannom trojuholníku so stranou dĺžky 3 sú umiestnené štyri body. Ukážte, že niektoré dva z nich majú vzdialenosť najviac $\sqrt{3}$.

Úloha 2.4.24. V pravidelnom šesťuholníku so stranou dĺžky 1 je rozmiestnených sedem bodov. Ukážte, že niektoré dva z nich majú vzdialenosť najviac 1.

Platilo by rovnaké tvrdenie aj pre číslo menšie ako 1?

Úloha 2.4.25. Dokážte: Ak máme deväť bodov v kocke s hranou dĺžky 2, tak sa medzi nimi dajú nájsť dva rôzne body, ktorých vzdialenosť je nanajvýš $\sqrt{3}$.

Úloha 2.4.26. Majme obdĺžnik so stranami 3 a 4. V tomto obdĺžniku je umiestnených:
a) 7 bodov;
b*) 6 bodov;
c) 5 bodov.
Zistite, v ktorých z týchto prípadov sa v obdĺžniku nutne musia nachádzať dva body, ktorých vzdialenosť je najviac $\sqrt{5}$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite.)

Úloha 2.4.27. Dokážte, že spomedzi 100 prirodzených čísel sa vždy dá vybrať niekoľko tak, aby súčet bol deliteľný číslom 100.

Úloha 2.4.28. Ak vyberieme 38 kladných párnych čísel menších než 1000, tak sú medzi nimi dve také, ktorých vzdialenosť je najviac 26.

Kapitola 3

Matematická indukcia

Vo všetkých matematických disciplínach sa vyskytujú tvrdenia typu „Pre každé celé číslo $n \geq 0$ platí ...“, „Pre všetky celé čísla $n \geq 2$ platí ...“, a podobne. Vyložíme teraz princíp matematickej indukcie, ktorý umožňuje dokázať pravdivosť takýchto tvrdení.

3.1 Princíp matematickej indukcie

Veta 3.1.1 (Princíp matematickej indukcie)**.** *Nech X je množina celých nezáporných čísel, pre ktorú platí:*

a) *Číslo 0 je prvkom X. (báza indukcie)*
b) *Ak číslo n je prvkom X, tak aj číslo $n+1$ je prvkom X. (indukčný krok)*

Potom X je množina všetkých celých nezáporných čísel.

Princíp matematickej indukcie je založený na jednoduchej logike: Podľa a) číslo 0 patrí do X. Položme $n = 0$. Tvrdenie b) je v tvare implikácie. Predpoklad $0 \in X$ je splnený a keďže b) je pravdivý výrok, musí byť číslo 1 prvkom X. Podobne, pre $n = 1$ podľa b) číslo 2 je prvkom X, úvahu zopakujeme pre $n = 2$, atď.

Princíp matematickej indukcie buď *považujeme za axiomu* (teda tvrdenie, ktoré nedokazujeme a a priori považujeme za pravdivé), alebo ho dokážeme pomocou nejakej inej axiomy.

Dokážeme pravdivosť Princípu matematickej indukcie pomocou axiomy o dobrom usporiadaní, ktorá hovorí:

Axioma (Axioma o dobrom usporiadaní)**.** Každá neprázdna podmnožina celých nezáporných čísel má najmenší prvok.

Dôkaz princípu matematickej indukcie. Budeme postupovať nepriamo. Predpokladajme pravdivosť tvrdení a) a b) a nech predsa existuje celé nezáporné číslo, ktoré nie je prvkom X. Medzi všetkými takými číslami zoberme najmenšie[1] a označme ho n^*. Podľa a) musí byť $n^* > 0$ a keďže n^* bolo najmenšie, $n^* - 1$ musí byť prvkom X. Potom ale podľa b) je n^* prvom X, čo je spor. □

[1] Tu sme využili axiomu o dobrom usporiadaní.

3.2 Sumy a nerovnosti

Príklad 3.2.1. Dokážte, že pre každé celé nezáporné celé číslo n a reálne číslo $q \neq 1$ je súčet

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Riešenie. Matematickou indukciou dokážeme, že množina X všetkých celých nezáporných čísel pre ktoré platí uvedená rovnosť obsahuje každé celé nezáporné číslo. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$1 = \frac{q - 1}{q - 1}.$$

Tým sme overili bázu indukcie. Preveríme platnosť indukčného kroku.

Nech n je celé nezáporné číslo, a predpokladajme, že $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

Počítajme:

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} &= (1 + q + q^2 + \cdots + q^n) + q^{n+1} \stackrel{IP}{=} \\ &= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \\ &= \frac{q^{n+1}(q - 1) + q^{n+1} - 1}{q - 1} = \\ &= \frac{q^{n+2} - q^{n+1} + q^{n+1} - 1}{q - 1} = \\ &= \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

pričom druhú rovnosť sme mohli napísať na základe nášho predpokladu. (Označili sme ju IP; indukčný predpoklad.) Tým sme dokázali platnosť indukčného kroku.

Záver: Uvedené tvrdenie platí pre každé celé nezáporné číslo n a $q \neq 1$ □

- V aplikáciách, podobne ako v príklade 3.2.1, množina X bude množina všetkých n, pre ktoré platí dokazované tvrdenie.
- Princíp matematickej indukcie má viacero variantov. Niekedy tvrdenie, ktoré potrebujeme dokázať, je definované a platí od istej hodnoty, napríklad $n = 2$. Potom v kroku a) (báza indukcie) overujeme platnosť tvrdenie pre číslo 2. Niekedy je zas výhodné v indukčnom kroku využiť nielen platnosť tvrdenia pre n, ale pre všetky hodnoty nanajvýš rovné n.

Príklad 3.2.2. Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 1$ platí nerovnosť

{03ind:EQNEROV}

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} < 1. \tag{3.1}$$

Riešenie. Budeme postupovať matematickou indukciou, podobne ako v predošlom príklade. Pre $n = 1$ máme $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} < 1$. (Báza indukcie je overená.)

Nech $n \geq 1$ je celé číslo a nech platí

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} < 1.$$

Počítajme:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\underbrace{\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)}_{<1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}<1+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Na tomto mieste sme sa zasekli, lebo výraz na pravej strane nie je menší ako 1.

Priamočiare využitie indukčného predpokladu nás nepriviedlo k želanému záveru. Budeme musieť vymyslieť niečo šikovnejšie.

Všimnime si, že $\frac{1}{n(n+1)}$ je možné vyjadriť v tvare $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. To nám umožňuje súčet na ľavej strane nerovnosti napísať ako

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Vďaka tomu, že sa veľa členov vykrátilo, dostávame rovnosť

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}. \tag{3.2}$$ {03ind:EQROV}

Je vcelku jasné, že ak vieme zdôvodniť platnosť (3.2), tak máme aj dôkaz nerovnosti (3.1) zo zadania príkladu.

Túto rovnosť sme už zdôvodnili pomerne neformálnym argumentom. Vieme ho však ľahko prepísať na dôkaz matematickou indukciou.

Dôkaz rovnosti (3.2). Pre $n=1$ máme $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$. (Báza indukcie je overená.)

Nech $n\geq 1$, a predpokladajme, že platí

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Počítajme:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\overset{IP}{=}$$
$$=1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}.$$

Platí aj indukčný krok. □

Na to, aby sme prišli na rovnosť (3.2) sme potrebovali uhádnuť[2] vhodný spôsob ako prepísať $\frac{1}{n(n+1)}$. Ale aj ak by nám takýto postup nenapadol, tak môžeme vyskúšať nájsť prvých pár hodnôt pre súčet $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2}\\
s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\\
s_3 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}\\
s_4 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}\\
s_5 &= \frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

n	1	2	3	4	5
s_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$

Azda sa z týchto prvých pár hodnôt už dá tipnúť, že výsledok by mohol byť $1 - \frac{n}{n+1}$. Potom môžeme skúsiť dokázať matematickou indukciou, že to je skutočne správny výsledok pre ľubovoľné n (nie iba pre prvých niekoľko hodnôt, ktoré sme vyskúšali.)

Poznámka 3.2.3. V predchádzajúcom príklade sme videli situáciu, s ktorou sa pri dôkaze matematickou indukciou môžeme stretnúť pomerne často. Zatiaľčo s dôkazom zadaného tvrdenia sme mali problémy, dôkaz silnejšie tvrdenia matematickou indukciou bez problémov prešiel.

Občas je teda užitočné namiesto zadaného tvrdenia dokazovať silnejšie tvrdenie – nemusí však byť úplne jednoduché prísť na to ako by bolo toto tvrdenie vhodné zosilniť. Aby sme na to prišli, môže nám niekedy pomôcť detailnejšia analýza indukčného kroku. (Snažiť sa pozrieť na to, čo nám vlastne v indukčnom kroku „chýbalo“.) Cvičenie takého typu, kde môže byť užitočné snažiť sa dokázať silnejšie tvrdenie, je napríklad úloha 3.5.22.

Poznámka 3.2.4. Podobnú úvahu akú sme využili pri nájdení súčtu v (3.2) vieme použiť často pri hľadaní súčtu radu, ak jednotlivé sčítance vieme prepísať tak, aby nám veľa členov vypadlo. Napríklad vyššie uvedený argument zodpovedá tejto schéme: Chceme vypočítať nejaký súčet $\sum\limits_{k=1}^{n} a_n$. Ak sa nám podarí n-tý sčítanec vyjadriť v tvare $a_n = b_{n+1} - b_n$, tak potom

$$\sum_{k=1}^{n} a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1.$$

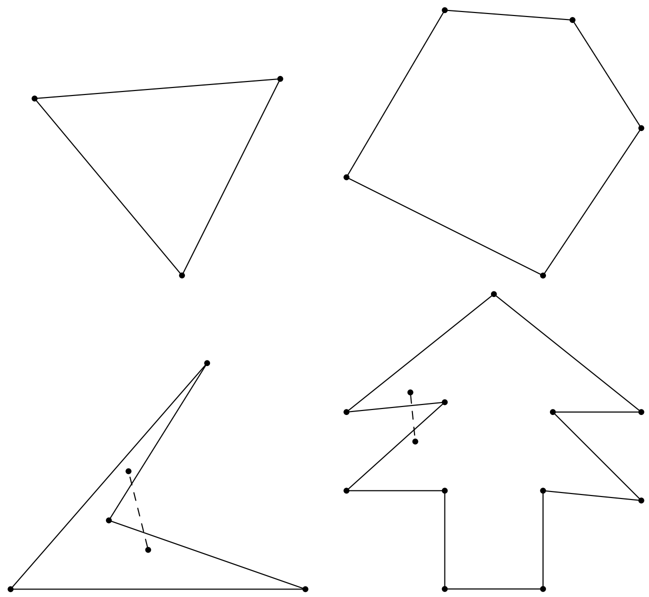
Formálne by sme takéto tvrdenie mohli dokázať indukciou.

Súčty takéhoto typu sa niekedy tiež nazývajú teleskopické sumy (alebo teleskopické rady).[3]

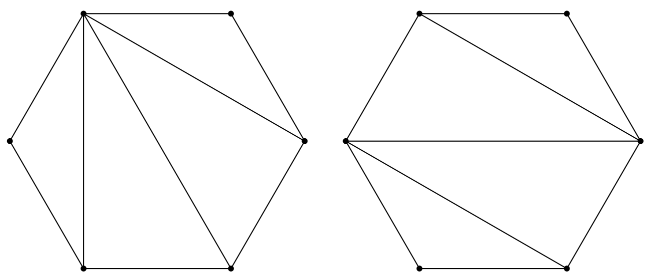
V princípe pri úlohách takéhoto typu ak máme zadanú pravú stranu, tak môžeme skúšať, či ak upravujeme rozdiel $b_{n+1} - b_n$, tak skutočne dostaneme a_n. (Ale aj ak ju nemáme zadanú a podarí sa nám vyjadriť n-tý sčítanec v tvare rozdielu, tak takýto prístup nám môže pomôcť ju objaviť.)

[2]V skutočnosti to nemusí byť až také ťažké, ak sme sa už s podobným postupom stretli. Alebo keď sa neskôr na matematickej analýze budete učiť o rozklade na parciálne zlomky, tak budete vidieť, že toto je veľmi jednoduchý špeciálny prípad.

[3]`https://en.wikipedia.org/wiki/Telescoping_series`



Obr. 3.1: Príklady konvexných ($n = 3$ a $n = 5$) a nekonvexných ($n = 4$ a $n = 11$) n-uholníkov



Obr. 3.2: Dve rôzne triangulácie šesťuholníka

3.3 Triangulácia n-uholníka

Uvažujme *konvexný* n-uholník $n \geq 3$. (Útvar voláme konvexný, ak pre ľubovoľné dva jeho body aj celá úsečka spájajúca tieto dva body patrí tomuto útvaru.) Príklady konvexných a nekonvexných n-uholníkov môžete vidieť na obrázku 3.1.

Zrejme každý konvexný n-uholník, $n > 3$, má diagonálu a preto má zmysel uvažovať *maximálnu sústavu S diagonál*. Tým myslíme takú sústavu, že žiadne dve diagonály z S sa nepretínajú vnútri n-uholníka a pridanie ľubovoľnej inej diagonály do S by pretnutie diagonál spôsobilo. *Trianguláciou* n-uholníka rozumieme jeho rozklad na trojuholníky maximálnou sústavou diagonál.

Na obrázku 3.2 môžete vidieť dve rôzne triangulácie šesťuholníka sústavami S_1, S_2. Všimnite si, že $|S_1| = |S_2| = 3$ a počet trojuholníkov v každej z týchto triangulácií je rovný 4. Podobný experiment pre $n = 4, 5, 7$ nás vedie k hypotéze, ktorá je sformulovaná v nasledujúcom príklade ako tvrdenie.

Príklad 3.3.1. Nech $n \geq 3$ a P_n je konvexný n-uholník. Ukážte, že každá maximálna sústava S diagonál v P_n má veľkosť $n - 3$ a určuje rozklad P_n na $n - 2$ trojuholníkov.

Dôkaz. Postupujme matematickou indukciou podľa n.

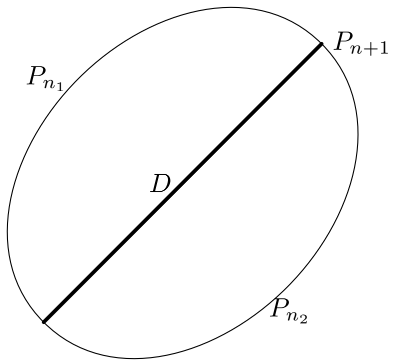
Pre $n = 3$ máme trojuholník, ktorý nemá žiadnu diagonálu, $S = \emptyset$ a $3 - 3 = 0$. (Báza je overená.)

Indukčný krok: Nech $n \geq 3$ je celé číslo, a predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky n' také, že $3 \leq n' \leq n$. Overíme platnosť tvrdenia pre $n + 1$.

Uvažujme $(n+1)$-uholník P_{n+1}. Keďže $n+1 > 3$, P_{n+1} má aspoň jednu diagonálu, a teda má maximálnu sústavu diagonál S. Zvoľme jednu diagonálu z S a pomenujme ju D. Táto diagonála delí P_{n+1} na dve časti, na konvexný n_1-uholník a konvexný n_2-uholník, pričom

$$n_1 + n_2 = (n + 1) + 2$$

(lebo koncové vrcholy D patria obom).



Obr. 3.3: Diagonála delí P_{n+1} na menšie mnohouholníky

Označme S_1, S_2 diagonály z S, ktoré sú diagonálami v P_{n_1} a P_{n_2}.

Tvrdíme, že S_1 je maximálna sústava diagonál v P_{n_1} a S_2 je maximálna sústava diagonál v P_{n_2}. Skutočne, v opačnom prípade by sme mohli nejakú novú diagonálu nakresliť v P_{n_1} (respektíve v P_{n_2}) a tým by sme získali sústavu nepretínajúcich sa diagonál v P_{n+1}, čo je spor s tým, že S je maximálna.

Teraz, keďže $n_1, n_2 < n+1$, podľa indukčného predpokladu platí $|S_1| = n_1-3$, $|S_2| = n_2-3$ a tak

$$\begin{aligned} |S| &= |S_1| + |S_2| + 1 = (n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 \\ &= (n_1 + n_2) - 5 = (n + 1 + 2) - 5 \\ &= (n + 1) - 3 \end{aligned}$$

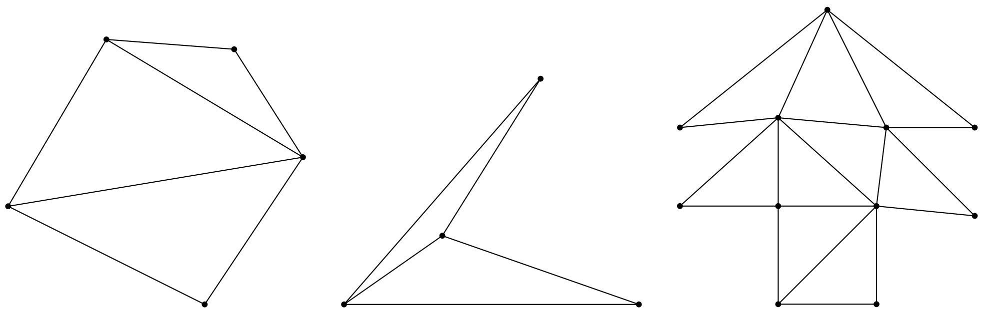
Ďalej, opäť podľa indukčného predpokladu, S_1 určuje trianguláciu P_{n_1} s $n_1 - 2$ trojuholníkmi a S_2 trianguláciu P_{n_2} s $n_2 - 2$ trojuholníkmi. Keďže diagonála D je strana P_{n_1} aj P_{n_2}, tieto dve triangulácie („zlepené“ cez D) určujú trianguláciu P_{n+1}, ktorá pozostáva z

$$(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = (n_1 + n_2) - 4 = (n + 1 + 2) - 4 = (n + 1) - 2$$

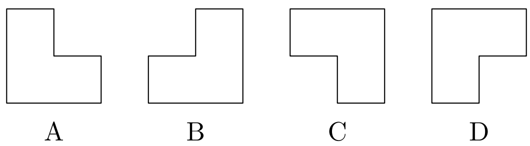
trojuholníkov.

Tým sme overili indukčný krok.

Záver: Tvrdenie je platné pre každé celé číslo $n \geq 3$ $\square$



Obr. 3.4: Príklady triangulácií konvexných i nekonvexných mnohouholníkov



Obr. 3.5: Štyri možné otočenia trimina tvaru L

Ako by to dopadlo pre nekonvexné n-uholníky? K dôkazu platnosti vyššie uvedeného tvrdenia pre nekonvexné n-uholníky stačí ukázať, že v každom takom n-uholníku existuje diagonála (t.j. spojnica dvoch vrcholov, ktorá celá leží v n-uholníku.) Potom už len imitujeme predchádzajúci dôkaz.

Úloha 3.3.1. Ukážte, že nekonvexný n-uholník, $n \geq 4$, má diagonálu.

Ako dôsledok dostávame

Dôsledok 3.3.2. *Súčet vnútorných uhlov n-uholníka je* $(n-2) \cdot 180°$.

Ak ste viac zvyknutí používať uhly v radiánoch (čo sa na vysokej škole bude asi vyskytovať častejšie ako stupne), tak dostanete $(n-2)\pi$.

3.4 Dláždenie triminami

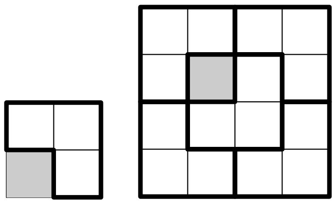
Ako ďalšiu ukážku indukcie si ukážeme príklad na dláždenie. Jeden problém z tejto oblasti sme už videli v úlohe 2.4.2. Aj teraz budeme dláždiť „poškodenú“ šachovnicu – vynecháme jeden štvorec. Nebudeme však používať dominá, ale triminá tvaru L. (Také ako sú na obrázku 3.5.)

Matematickou indukciou ukážeme, že takéto dláždenie existuje pre šachovnicu rozmerov $2^n \times 2^n$ s jedným vyrezaným štvorcom.

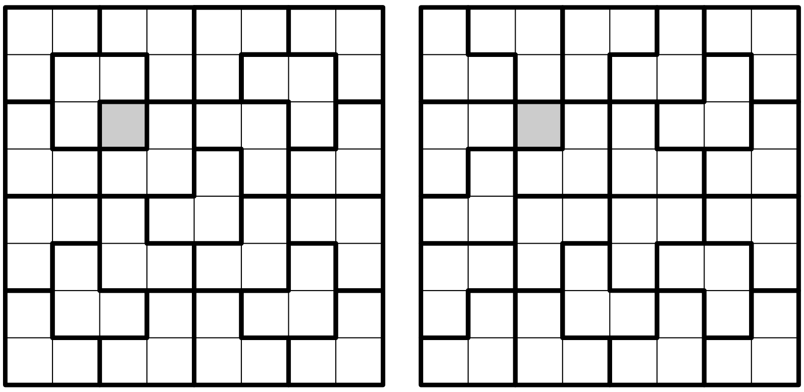
Tvrdenie 3.4.1. *Nech $n \geq 1$ je celé číslo. Ak na šachovnici rozmerov $2^n \times 2^n$ vynecháme jeden štvorec, tak vzniknutý útvar sa dá vydláždiť triminami tvaru L.*

Dôkaz. Matematickou indukciou.

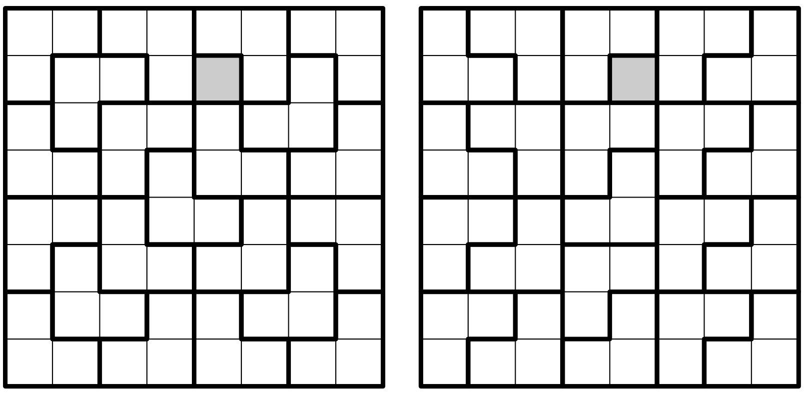
Báza indukcie: Pre $n = 1$ máme šachovnicu 2×2. Po vyrezaní jedného štvorca nám vlastne zostane práve jedno trimino tvaru L. (Obrázok 3.6.)



Obr. 3.6: Šachovnica 2×2 a 4×4 (s vynechaným štvorcom) vydláždená triminami

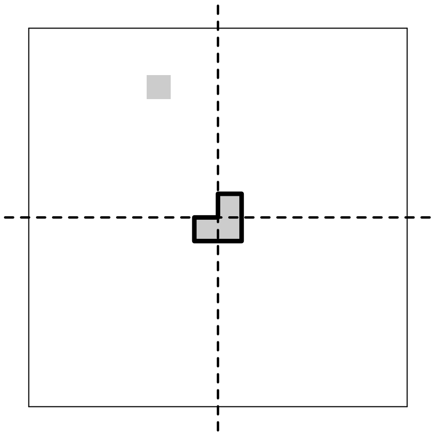


Obr. 3.7: Príklady dláždenia šachovnice 8×8 s vynechaným štvorcom



Obr. 3.8: Príklady dláždenia šachovnice 8×8 s vynechaným štvorcom

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre šachovnice rozmerov $2^n \times 2^n$. Ak máme šachovnicu $2^{n+1} \times 2^{n+1}$, tak ju môžeme rozdeliť na štyri menšie šachovnice rozmerov $2^n \times 2^n$. Jedna z nich obsahuje vyrezaný štvorec, tá sa dá vydláždiť podľa indukčného predpokladu. Teraz pridáme jedno trimino, ktoré zasahuje do každej z ostatných troch šachovníc práve jedným políčkom. (Pozri obrázok 3.9.)



Obr. 3.9: Situácia z dôkazu tvrdenia 3.4.1

Potom nám v týchto troch častiach zostane vydláždiť celý zvyšok, t.j. šachovnicu $2^n \times 2^n$ bez jedného štvorca. To, že takáto šachovnica sa dá vydláždiť, opäť vieme z indukčného predpokladu. □

3.5 Cvičenia

Úloha 3.5.1. Dokážte, že[4]

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

platí pre každé celé číslo $n \geq 2$.

Úloha 3.5.2. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí: $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. (Vedeli by ste nájsť aj iné odvodenie ako matematickou indukciou?)

Úloha 3.5.3. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n platí

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Úloha 3.5.4. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

[4]Pre zaujímavosť môžeme spomenúť, že platí $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. `https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem`

Úloha 3.5.5. Určte súčet prvých n nepárnych kladných celých čísel. Vedeli by ste vymyslieť aj „obrázkový“ (geometrický) dôkaz? Vedeli by ste tento vzorec odvodiť z výsledkov niektorej z predošlých úloh?

Úloha 3.5.6. Dokážte, že

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$$

platí pre ľubovoľné kladné celé číslo n.

Úloha 3.5.7. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

Úloha 3.5.8. Dokážte, že pre $n\in\mathbb{N}$ platí: $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}-1$.

Úloha 3.5.9. Dokážte, že pre $n\in\mathbb{N}$ platí: $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^n}$. (Je nejaký vzťah k predošlej úlohe? Dal by sa vymyslieť „obrázkový“ dôkaz?)

Úloha 3.5.10. Odvoďte indukciou vzorec pre výpočet súčtu prvých n členov aritmetickej postupnosti: $\sum\limits_{k=0}^{n}(a+kd)=(n+1)\frac{2a+nd}{2}$. (Inak povedané: Počet členov $\times$ priemer prvého a posledného člena.[5])

Úloha 3.5.11. Dokážte, že pre $n\in\mathbb{N}$ platí: $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^k=(n-1)2^{n+1}+2$.

Úloha 3.5.12. Dokážte, že pre celé číslo $n\geq 1$ platí:

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1.$$

(T.j. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.)

Úloha 3.5.13. Dokážte, že pre celé číslo $n\geq 1$ platí:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

(T.j. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$.)

Úloha 3.5.14. Dokážte, že platí $(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$.

Úloha 3.5.15. Dokážte, že $n!\geq 2^n$ pre prirodzené čísla $n\geq 4$.

Úloha 3.5.16. Dokážte, že $2^n\geq n^2$ pre prirodzené čísla $n\geq 4$.

Úloha 3.5.17. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n\geq 2$ platí $4^n>3^n+2^n$.

[5] Takto sa vzorec pre súčet členov aritmetickej postupnosti vcelku ľahko pamätá.

Úloha 3.5.18*. Dokážte: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}-1$. (Hint: Pomôže vhodne upraviť výraz $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Tento výraz by sa mohol vyskytnúť v indukčnom kroku alebo pri použití teleskopickej sumy.)

Úloha 3.5.19*. Dokážte: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

Úloha 3.5.20*. Dokážte, že pre $n \geq 3$ platí $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$. (Inak povedané: Postupnosť $(\sqrt[n]{n})$ je klesajúca.)

Úloha 3.5.21. Dokážte, že pre $x \geq -1$ platí $(1+x)^n \geq 1+nx$. (Bernouilliho nerovnosť)

Úloha 3.5.22. Dokážte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1$. (Návod: Skúste prísť na to, čomu sa rovná suma na ľavej strane a dokázať túto rovnosť indukciou.)

Úloha 3.5.23. Majme $n \geq 1$ priamok v rovine. Aký je najmenší počet farieb ktorými možno ofarbiť časti roviny určené týmito priamkami tak, aby susedné časti mali rôznu farbu? (Dve časti roviny považujeme za susedné ak sú oddelené priamkou, alebo polpriamkou, alebo úsečkou.)

Úloha 3.5.24. V krajine Indukcia je $n \geq 2$ miest, pričom každé dve mestá sú spojené jednosmernou cestou. Nájde sa prechádzka, ktorá začína v jednom meste, končí v inom meste a navštívi každé mesto presne raz? Napríklad pre tri mestá, pomenujme ich A, B, C a spojenie $A \to B$, $A \to C$ a $B \to C$, je $A \to B \to C$ takou prechádzkou.

Úloha 3.5.25. Majme tabuľku čokolády s $m \times k$ štvorčekmi. Postupne ju budeme lámať na kúsky nasledujúcim spôsobom: v každom kroku si zvolíme kúsok ktorý má aspoň dva štvorčeky a rozlomíme ho podĺa vodorovnej alebo zvislej linajky (linajky tvoria štvorčekovú mozaiku čokolády). Skončíme keď je čokoláda polámaná na štvorčeky. Ako dlho nám bude trvať kým čokoládu polámeme? Hint: dôležitý je len počet štvorčekov čokolády, tvrdenie preto stačí dokázať pre čokoládu ktorá má n štvorčekov. Aplikujte matematickú indukciu, potom skúste argument ktorý indukciu nepoužíva.

Úloha 3.5.26. Aký najväčší počet kúskov pizze môžeme dostať keď rez nožom vždy vedieme priamočiaro? Akademickejšie: Aký je najväčší počet $f(n)$ častí roviny, ktoré sú určené n priamkami v rovine? Hint: preskúmajte malé $n = 1, 2, 3$, všimnite si v akej vzájomnej sú priamky v prípade keď sa dosahuje maximum, vyslovte hypotézu a následne ju dokážte.

Úloha 3.5.27. V tenisovom turnaji hrajú každí dvaja hráči proti sebe presne raz. Keď sa turnaj skončí, každý hráč si napíše na zoznam mená hráčov ktorých porazil a tiež tých, ktorí boli porazení niektorým hráčom ktorého on sám porazil. Indukciou ukážte, že aspoň jeden hráč má na zozname meno každého iného hráča. Potom skúste argument ktorý indukciu nepoužíva.

Úloha 3.5.28. Pozorne prečítajte dôkaz nasledujúceho tvrdenia indukciou: Máme n priamok v rovine, pričom žiadne dve nie sú rovnobežné. Potom všetky tieto priamky prechádzajú cez ten istý bod. Dôkaz: Pre $n = 1; 2$ tvrdenie platí. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n priamok a uvažujme množinu $S = \{a, b, c, d, \dots\}$, $n+1$ priamok. Zmažme priamku c. Dostaneme množinu $S' = \{a, b, d, \dots\}$, n priamok. Žiadne dve z nich nie sú rovnobežné preto, podľa indukčného predpokladu, všetky prechádzajú bodom P. Vráťme priamku ca zmažme priamku d. Dostaneme množinu $S'' = \{a, b, c, \dots\}$, n priamok, žiadne dve nie sú rovnobežné. Opäť podľa indukčného predpokladu, všetky prechádzajú bodom P'. Priamky a, b patria do množiny S' a tiež do S'', preto $P = P'$ a tak c prechádza cez P; zvyšné priamky tiež prechádzajú cez P podľa voľby bodu P. Takže všetky priamky prechádzajú cez bod P. Hm, lenže tvrdenie neplatí. Kde v dôkaze je chyba?

Úloha 3.5.29. Pozorne prečítajte dôkaz nasledujúceho tvrdenia indukciou: „Všetky kone majú tú istú farbu.“ Keďže na svete je konečný počet koní, tvrdenie môžeme vysloviť takto: Pre každé kladné celé číslo n, každých n koní má tú istú farbu. Tu je dôkaz: Pre $n = 1$ tvrdenie platí, lebo jeden kôň má tú istú farbu ako je tá jeho. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n koní, ukážeme že platí pre $n+1$ koní. Vezmime $n+1$ koní a zoraďme ich do radu. Prvých n koní má tú istú farbu, povedzme čiernu, podľa indukčného predpokladu. Posledných n koní musí mať tiež tú istú farbu, opäť podľa indukčného predpokladu. Takže všetkých $n+1$ koní je čiernych, lebo prvých n koní je čiernych, ako sme videli, a medzi nimi je druhý, tretí, $\ldots$, n-tý kôň a tieto sú medzi poslednými n koňmi. Takto sme ukázali, že všetky kone na svete majú tú istú farbu. Hm, lenže tvrdenie neplatí. Kde v dôkaze je chyba?

Úloha 3.5.30. Fermatove číslo F_n, $n = 0, 1, 2, \cdots$, je definované predpisom $F_n = 2^{2^n} + 1$. Napríklad, $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537, F_5 = 641 \cdot 6700417$. Dokážte platnosť nasledujúcej rovnosti

$$F_0 \cdot F_1 \cdot \cdots \cdot F_{n-1} = F_n - 2,\ n \geq 1.$$

Pomocou predchádzajúceho ukážte, že ľubovoľné dve Fermatove čísla sú nesúdeliteľné. Odtiaľ, spolu s faktom že Fermatových čísel je nekonečne veľa odvoďte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Úloha 3.5.31. V čakárni u lekára je n pacientov. Každý z nich si vezme číslo medzi 1 a n. Predtým ako lekár začal ordinovať, sestrička povedala pacientom, že síce nemusia byť vyšetrení v poradí určenom číslami, ale že pred žiadnym z nich nebude vyšetrených viac pacientov než by bolo keby sa dodržiavalo poradie podľa čísel. Teda pred pacientom s číslom i môže byť vyšetrených nanajvýš $i - 1$ pacientov. Keď to počul pán Mrkvička, tak povedal: „Hm, to je to isté ako keby sa poradie podľa čísel rešpektovalo.“ Mal pravdu?

Kapitola 4

Spočítavanie – základné princípy

Predpokladajme, že máme danú konečnú množinu M a zaujíma nás, aká je jej veľkosť $|M|$. Možno prvé čo nás napadne, je jednoducho $|M|$ určiť spočítaním prvkov M po jednom. V tejto kapitole zhrnieme niekoľko jednoduchých prístupov k riešeniu úloh na počet prvkov. Tieto sú, ako uvidíme, formálnym vyjadrením a zovšeobecnením našej skúsenosti s počítaním.

- **Problém.** Nech M je konečná množina. Určte veľkosť $|M|$ množiny M.
- **Otázka.** Jestvujú všeobecné prístupy k riešeniu nášho problému?
- Pozorovanie:

$$|M| = \sum_{x \in M} 1. \tag{4.1}$$

{04pocit:SUM1}

4.1 Sčítací princíp

Príklad 4.1.1. Koľko študentov je v posluchárni?

Keď napríklad

$$\begin{aligned} M &= \text{ študenti v posluchárni} \\ &= \{\text{Jano}, \text{Ivan}, \text{Tomáš}, \text{Anna}\} \end{aligned}$$

tak

$$|M| = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Môžeme postupovať aj takto: Každý študent je buď dievča, alebo chlapec. Keď množinu dievčat označíme symbolom D a množinu chlapcov označíme CH, môžeme písať

$$M = D \cup CH \qquad \text{a} \qquad D \cap CH = \emptyset,$$

a tak

$$|M| = |D| + |CH|.$$

Alebo aj takto: V posluchárni sú tri rady lavíc, pomenujme ich 1, 2, 3, a každý študent je v práve jednom z nich. Keď množinu študentov v rade i označíme M_i, tak

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \qquad \text{a} \qquad M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_3 = \emptyset.$$

Preto

$$|M| = |M_1| + |M_2| + |M_3|.$$

Neformálne: Veľkosť celku sa rovná súčtu veľkostí jeho častí.

4.1.1 Formulácia a dôkaz sčítacieho princípu

Veta 4.1.2 (Sčítací princíp)**.** *Nech $n \geq 1$ je celé číslo a $M_1, \dots, M_n$ sú navzájom disjunktné množiny, t.j. $M_i \cap M_j = \emptyset$ pre všetky $i \neq j$. Potom*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |M_i|. \tag{4.2}$$ {04pocit:EQSC

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou podľa n.

1° Báza indukcie: Platnosť tvrdenia pre $n = 1$ je jasná, pre $n = 2$ to vidno z Vennovho diagramu.

2° Nech $n \geq 2$ a tvrdení platí pre ľubovoľných n navzájom disjunktných množín. Overíme platnosť indukčného kroku.

Nech $M_1, \dots, M_n, M_{n+1}$ sú navzájom disjunktné množiny. Počítajme:

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} M_i = \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right)}_{A} \cup \underbrace{M_{n+1}}_{B}, \qquad A \cap B = \emptyset.$$

Potom máme

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^{n+1} M_i\right| &\overset{(1)}{=} \left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| + |M_{n+1}| = \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} |M_i| + |M_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |M_i|. \end{aligned}$$

V rovnosti (1) sme využili $|A \cup B| = |A| + |B|$, t.j. platnosť dokazovaného tvrdenia[1] pre $n = 2$. Rovnosť (2) je použitie platnosti tvrdenia pre n (indukčný predpoklad).

Overili sme platnosť indukčného kroku. Tým je tvrdenie dokázané. □

Iný dôkaz. Majme dané navzájom disjunktné množiny $M_1, \dots, M_n$. Chceme povedať niečo o vzťahu čísel vystupujúcich v tvrdení, t.j. počtu prvkov zjednotenia (ľavá strana rovnosti) a súčtom prvkov jednotlivých množín (pravá strana rovnosti).

Ľavá strana sa dá chápať tak, že pre každý prvok zjednotenia započítame jednotku a tieto prvky sčítame. Takisto do pravej strany prispeje každý prvok zjednotenia jednotkou, lebo uvažujeme navzájom disjunktné množiny, a teda sa vyskytne v práve jednej z množín $M_1, \dots, M_n$.

Formálnejšie by sme to mohli zapísať takto:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| \overset{(1)}{=} \sum_{x \in \bigcup_{i=1}^{n} M_i} 1 \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in M_i} 1 \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} |M_i|.$$

Rovnosti (1) aj (3) sme dostali tak, že sme počet prvkov každej množiny rozdelili na súčet po členoch (pozri (4.1)). Rovnosť (2) znamená, že sme dlhšiu sumu rozdelili na časti s menej sčítancami, čiže vyplýva z vlastností sčitovania.[2] Všimnime si, že v rovnosti (2) využívame aj disjunktnosť množín, s ktorými pracujeme. □

[1] Práve to, že využívame túto rovnosť, bol dôvod, prečo v báze indukcie sme okrem $n = 1$ chceli zdôvodniť aj $n = 2$.

[2] Napríklad pre dvoj-, troj- a štvorprvkovú množinu by sme tu mali rovnosť $(1 + 1) + (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Takáto rovnosť platí samozrejme aj všeobecnejšie: $(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4 + x_5) + (x_6 + x_7 + x_8 + x_9) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$.

Ako používame sčítací princíp: Problém P rozložíme na navzájom sa vylučujúce podproblémy, ktoré zahrňujú celý problém P. Potom jednotlivé podproblémy vyriešime. Pretože množiny riešení daných podproblémov sú navzájom disjunktné, počet riešení pre P je rovný súčtu veľkosti týchto množín.

Sčítací princíp sme používali už skôr, napríklad pri určení počtu prechádzok v kocke (časť 1.3.1, keď sme prechádzky po kocke rozdelili na tri navzájom disjunktné množiny M_1, M_2, M_3, pozri obrázok 1.6 a rovnosť (1.1)), tiež pri probléme o triangulácii n-uholníka (príklad 3.3.1; v dôkaze sme rozdelili množinu S diagonál na dve disjunktné časti S_1, S_2).

4.1.2 Pascalova formula

Príklad 4.1.3. Koľkými spôsobmi môžeme zvoliť k-členný výbor z n študentov? Akademickejšie: Koľko k prvkových podmnožín má n prvková množina?

Pre dané k a n tento počet je hodnotou *binomického koeficienta*, ktorý označujme symbolom $\binom{n}{k}$.

Riešenie. Máme jediný výbor, ktorý nemá žiadneho člena, preto $\binom{n}{0} = 1$.

Výbor nemôže mať viac členov než je študentov, preto $\binom{n}{k} = 0$ pre $k > n$.

Uvažujme zvyšný prípad $0 < k \leq n$. Všetky výbory rozdelíme na dve disjunktné skupiny: A=výbory, ktorých členom je Jano a B=výbory, ktorých členom Jano nie je.

Podľa sčítacieho principu

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= |A| + |B| \\ &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad \text{pre } k \geq 1 \end{aligned}$$

a $\binom{n}{0} = 1$. □

Rovnosť

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{4.3}$$ {04pocit:EQPASCAL}

je známa ako *Pascalova formula*, a je základom pre Pascalov trojuholník. [3]

Vyriešili sme príklad4.1.3? Síce nemáme v ruke explicitný vzore pre výpočet, odvodili sme však rekurentný vzťah, ktorý umožňuje určiť hodnotu $\binom{n}{k}$, ak poznáme hodnotu pre „čitatele“ menšie ako n.

Tento výpočet je naznačený v nasledujúcich tabuľkách:

$$\begin{array}{llllll} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \end{array}$$

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal's_identity`

Asi ste ich častejšie zvykli kresliť takto a poznáte ich pod názvom *Pascalov trojuholník.*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

4.2 Násobiaci princíp

Pri voľbe výboru v príklade4.1.1 bolo podstatné len to, ktorí študenti boli zvolení do výboru, na poradí v akom boli zvolení nezáležalo. Niekedy však je o poradí potrebné (alebo výhodné) uvažovať.

Príklad 4.2.1. Program športového dňa pozostáva z dopoludňajších aktivít A, B, C, D a popoludňajších aktivít X, Y, Z. Koľkými spôsobmi si môžeme zvoliť program nášho športového dňa, za predpokladu, že chceme absolvovať jednu aktivitu dopoludnia aj popoludní?

Všetky možnosti pre voľbu programu sú znázornené v nasledujúcej tabuľke:

dop\pop	X	Y	Z	
A	•	•	•	dop. A, máme $\underline{3}$ možnosti pre pop.
B	•	•	•	dop. B, máme $\underline{3}$ možnosti pre pop.
C	•	•	•	dop. C, máme $\underline{3}$ možnosti pre pop.
D	•	•	•	dop. D, máme $\underline{3}$ možnosti pre pop.

Nezávisle od toho, akým spôsobom sme zvolili dopoludňajšiu aktivitu, máme 3 možnosti pre voľbu popoludňajšej aktivity. Celkovo máme $\boxed{4 \cdot 3 = 12}$ možností.

Príklad 4.2.2. Ako by to dopadlo, keď naše preferencie sú:
- dop. A, tak pop. X alebo pop. Y,
- dop. B, tak pop. X alebo pop. Z,
- dop. C, tak pop. Y alebo pop. Z,
- dop. D, tak pop. X alebo pop. Z.

Teraz dostávame možnosti uvedené tu:

dop\pop	X	Y	Z	
A	•	•		dop. A, máme $\underline{2}$ možnosti pre pop.
B	•		•	dop. B, máme $\underline{2}$ možnosti pre pop.
C		•	•	dop. C, máme $\underline{2}$ možnosti pre pop.
D	•		•	dop. D, máme $\underline{2}$ možnosti pre pop.

Teraz máme $\boxed{4 \cdot 2 = 8}$ možností pre priebeh športového dňa. Tieto dve tabuľky sú popisom našej scény:

- V prvom prípade máme pre každú voľbu aktivity dopoludnia rovnaký počet možností pre voľbu popoludňajšej aktivity (konkrétne tri).
- V druhom prípade máme pre každú voľbu aktivity dopoludnia rovnaký počet možností pre voľbu popoludňajšej aktivity (konkrétne dve).

Rozdiel je v tom, že v prvom prípade voľba popoludňajšej aktivity nezávisí od spôsobu voľby dopoludňajšej aktivity, v druhom prípade však áno. Obidva prípady sú konkrétnym prípadom všeobecnej situácie, budeme sa tomu teraz venovať.

4.2.1 Formulácia a dôkaz násobiaceho princípu

Veta 4.2.3 (Násobiaci princíp)**.** *Nech udalosť U pozostáva z udalostí $U_1, U_2, \dots, U_n$, v tomto poradí. Predpokladajme, že počet realizácií U_1 je rovný k_1, pre každú z nich počet možností ako nastane U_2 je rovný k_2, pre každú realizáciu U_1, U_2 máme k_3 možností ako nastane U_3, ..., pre každú realizáciu $U_1 \dots U_{n-1}$ máme k_n možností ako nastane U_n. Potom počet možností ako nastane U je rovný*

$$k_1 \cdot k_2 \cdots k_n. \tag{4.4}$$ {04pocit:EQNASOB}

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Báza indukcie: Pre $n = 1$ máme iba jednu udalosť U_1 a počet jej realizácií je k_1.

$$U = U_1 \qquad \text{a} \qquad |U_1| = k_1.$$

Pre $n = 2$: Nech realizácie U_1 sú $x_1, x_2, \dots, x_{k_1}$. Označme

$$\begin{aligned}
M_{x_1} &= \text{ realizácie } U_2\text{, keď } U_1 \text{ je realizovaná spôsobom } x_1,\\
M_{x_2} &= \text{ realizácie } U_2\text{, keď } U_1 \text{ je realizovaná spôsobom } x_2,\\
&\vdots\\
M_{x_{k_1}} &= \text{ realizácie } U_2\text{, keď } U_1 \text{ je realizovaná spôsobom } x_k.
\end{aligned}$$

Potom platí

$$|M_{x_1}| = |M_{x_2}| = \cdots = |M_{x_{k_1}}| = k_2.$$

Tieto množiny sú navzájom disjunktné, preto

$$|U_1, U_2| = |M_{x_1} \cup \cdots \cup M_{x_{k_1}}| = |M_{x_1}| + \cdots + |M_{x_{k_1}}| = k_1 \cdot k_2.$$

Indukčný krok: Predpokladajme, že $n \geq 2$ a tvrdenie platí pre ľubovoľnú udalosť $U = U_1, U_2, \dots, U_n$, ktorá vyhovuje predpokladom vety. Nech $U = U_1, \cdots, U_{n+1}$ je udalosť, ktorá vyhovuje predpokladom vety. Potom

$$U = U^*, U_{n+1}, \qquad \text{kde} \qquad U^* = U_1, \dots, U_n.$$

Podľa indukčného predpokladu, U^* môže nastať $k_1 \cdot k_2 \cdots k_n$ spôsobmi. Ďalej aplikujeme platnosť tvrdenia pre dve udalosti (ktorú sme už dokázali v báze indukcie) a dostaneme, že U nastane $(k_1 \cdot \ldots \cdot k_n) \cdot k_{n+1} = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n \cdot k_{n+1}$ spôsobmi. Tým je overený indukčný krok a platnosť násobiaceho princípu dokázaná. □

Všimnime , že napriek tomu, že násobiaci princíp sa zdá komplikovanejší než sčítací princíp, je dôsledkom sčítacieho princípu.

4.2.2 Príklady použitia

Príklad 4.2.4. Koľko je k-ciferných kladných čísiel?

Riešenie 1. k-ciferné kladné číslo $x_1x_2\dots x_k$ je jednoznačne určené voľbou jeho cifier.

$$\begin{cases} x_1\colon 1,2,\dots,9 & \text{máme 9 možností,} \\ x_i\colon 0,2,\dots 9 & \text{máme 10 možností, pre } i \geq 2. \end{cases}$$

Teda existuje $9 \cdot 10^{k-1}$ kladných celých k-ciferných čísel. □

Riešenie 2. Majme $y_1y_2\dots y_k$ také, že $y_i \in \{0,1,\dots,9\}$. Takýchto poradí je 10^k a z nich je 10^{k-1} je takých, že $y_1 = 0$. Podľa ščítacieho princípu

$$10^k - 10^{k-1} = 9 \cdot 10^{k-1}$$

je počet kladných celých k-ciferných čísel. □

Niekedy budeme používať sčítací a násobiaci princíp spolu (tak sme postupovali aj pri Riešení 2 predchádzajúceho príkladu):

Príklad 4.2.5. Máme 3 rôzne knihy v anglickom jazyku, 5 rôznych kníh v slovenskom jazyku a 4 rôzne knihy v ruskom jazyku. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať dve knihy v rôznych jazykoch?

Riešenie. Najskôr si volíme jazyk v akom budú knihy, teda 3 možnosti: AS, AR, SR.
- AS: $3 \cdot 5 = 15$ možností
- AR: $3 \cdot 4 = 12$ možností
- SR: $5 \cdot 4 = 20$ možností

Celkovo: $15 + 12 + 20 = 47$ možností. □

Príklad 4.2.6. Manažér potrebuje vybrať 5-členný tím z 10 zamestnancov, pričom členovia tímu si zvolia jedného, dvoch, troch, alebo štyroch lídrov. Koľkými spôsobmi je možné zvoliť tím?

Riešenie. Máme $\binom{10}{5}$ možností pre voľbu tímu, a pre každú z nich 2^5 pre voľbu lídra, keď pripustíme aby líder nebol zvolený a tiež aby lídrom bol každý člen tímu. Celkovo, je $\binom{10}{5} \cdot (2^5 - 2) = \binom{10}{5} \cdot 30$ možností(Odpočítanie 2 zodpovedá možnostiam žiadny líder alebo 5 lídrov.).

□

4.2.3 Karteziánsky súčin množín

Násobiaci princíp aplikujeme v situácii, keď je potrebné (alebo výhodné) brať do úvahy poradie, čo explicitne vyjadruje udalosť U pozostávajúca z po sebe idúcich udalostí $U_1, U_2, \dots, U_n$, v tomto poradí. Niekedy výsledok ako nastane U_i nezávisí od spôsobu ako nastala udalosť $U_1, \dots, U_{i-1}$, pre všetky $i > 1$. S takým prípadom sme sa stretli v príklade4.2.1. Uvedenú situáciu formálne popisuje karteziánsky súčin množín.

Definícia 4.2.7. *Usporiadaná dvojica* prvkov x, y je objekt (x, y). Čo je usporiadaná dvojica, aký je to objekt, hovorí základná vlastnosť usporiadanej dvojice:

$$(x, y) = (u, v) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x = u \wedge y = v).$$

Karteziánsky súčin $A \times B$ množín A a B je množina všetkých usporiadaných dvojíc (x, y), kde $x \in A$ a $y \in B$

$$A \times B = \{(x, y) \colon x \in A, y \in B\}$$

Príklad 4.2.8. Položme $U_1 = \{A, B, C, D\}$, $U_2 = \{X, Y, Z\}$. Potom

$$\begin{aligned} U_1 \times U_2 = \{&(A, X), (A, Y), (A, Z), \\ &(B, X), (B, Y), (B, Z), \\ &(C, X), (C, Y), (C, Z), \\ &(D, X), (D, Y), (D, Z)\}, \end{aligned}$$

čo sú presne všetky prvky tabuľky z príkladu 4.2.1 na priesečníku riadku i a stĺpca j, $i = 1, 2, 3, 4$ a $j = 1, 2, 3$.

Karteziánsky súčin je možné definovať pre ľubovoľný konečný počet množín.

Definícia 4.2.9. *Usporiadaná n-tica* prvkov $x_1, x_2, \dots, x_n$ je objekt $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Základná vlastnosť usporiadaných n-tíc:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n)$$

Karteziánsky súčin $A_1 \times \cdots \times A_n$ množín $A_1, \dots, A_n$ je množina

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) \colon x_i \in A_i, i = 1, \dots, n\},$$

t.j. množina všetkých usporiadaných n-tíc, kde pre každé $i = 1, \dots, n$ platí $x_i \in A_i$ (t.j. i-tu zložku vyberáme z množiny A_i.)

Počet prvkov karteziánskeho súčinu vieme vypočítať na základe násobiaceho princípu:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$
$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

Príklad 4.2.10. Vo voľbách do AS FMFI sa rozhodovalo medzi kandidátmi za matematiku $\{J, F, R, T\}$, za informatiku $\{I, E\}$ a za fyziku $\{A, W, K\}$. Koľkými spôsobmi mohli dopadnúť voľby, ak za každú sekciu má byť zvolený jeden senátor?

Riešenie. Dohodnime sa, že výsledok voľby zapíšeme ako trojicu; prvý – matematika, druhý – informatika; tretí – fyzika. Napríklad (J, I, A), tiež (J, I, K) a podobne..

Tieto trojice sú prvkami množiny $\{J, F, R, T\} \times \{I, E\} \times \{A, W, K\}$ a podľa násobiaceho princípu máme $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ takýchto trojíc, čo je počet možností ako voľby môžu dopadnúť. □

Zvlášť zaujímavý je prípad, keď

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A.$$

Vtedy karteziánsky súčin $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-krát}}$ označujeme symbolom A^n. Definíciu rozšírime, pre $n = 1$ kladieme $A^1 = A$, pre $n = 0$ definujeme $A^0 = \{\emptyset\}$ (Čo je jednoprvková množina, ktorej prvkom je prázdna množina$\emptyset$. Nezamieňajte si $\{\emptyset\}$ s prázdnou množinou).

Množinu A nazývame *abeceda*, prvky $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ nazývame *slová v abecede* A dĺžky n a zvyčajne, pre $n \geq 1$, zapisujeme v tvare $x_1, \ldots, x_n$ alebo aj $x_1 \ldots x_n$.

Prvky $x_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$, nazývame *zložky slova* (i-ta zložka je prvok $x_i \in A_i$), alebo tiež súradnice slova. (Všimnite si, že takéto pomenovanie priamo zodpovedá tomu, čo poznáte z geometrie: rovina $= \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, priestor$= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, bod roviny reprezentujeme ako (x, y), bod priestoru ako (x, y, z). V lineárnej algebre budete študovať priestory typu $\mathbb{R}^n$, pre $n \geq 1$.)

Príklad 4.2.11. Koľko je všetkých slov dĺžky n v abecede $A = \{0, 1\}$? Ako by to dopadlo pre $|A| = r$.

Riešenie. V abecede $A = \{0, 1\}$ máme

$$|\underbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n}| = |\{0,1\}^n| = 2^n,$$

podľa násobiaceho princípu. V abecede $|A| = r$ je r^n slov dĺžky n, opäť podľa násobiaceho princípu □

Poznámka 4.2.12. Slová v abecede A dĺžky n poznáte pod názvom variácie s opakovaním n-tej triedy z prvkov A, môžete aj takýto názov používať.

4.3 Princíp bijekcie

Porovnať veľkosť jednej sady A objektov, a druhej sady B objektov môžeme tak, že prvky sád dáme do dvojíc. Keď má každý prvok z A pár a B sme nevyčerpali, tak vieme, že $|A| < |B|$. Ak sme B vyčerpali, tak sa dozvieme, že $|A| = |B|$. Keď naviac poznáme veľkosť $|B|$ tak sme zistili, v prípade že sme vyčerpali prvky z B, počet prvkov A. Takéto porovnávanie veľkostí množín pomocou „párovania“ ich prvkov do dvojíc je základnou myšlienkou princípu bijekcie. K jeho formulácii potrebujeme vyložiť pojem bijektívne zobrazenie.

Definícia 4.3.1. *Zobrazenie* f z množiny X do množiny Y je podmnožina $f \subseteq X \times Y$, splňujúca dodatočnú podmienku: pre každý prvok $x \in X$ existuje presne jeden prvok $y \in X$ taký, že $(x, y) \in f$.

Zobrazenie $f \subseteq X \times Y$ zapisujeme tiež $f \colon X \to Y$, a namiesto $(x, y) \in f$ píšeme $f(x) = y$. Hovoríme, že y je obraz x pri zobrazení f, alebo tiež že f zobrazuje x na y.

Pomenujeme niektoré dôležité typy zobrazení.

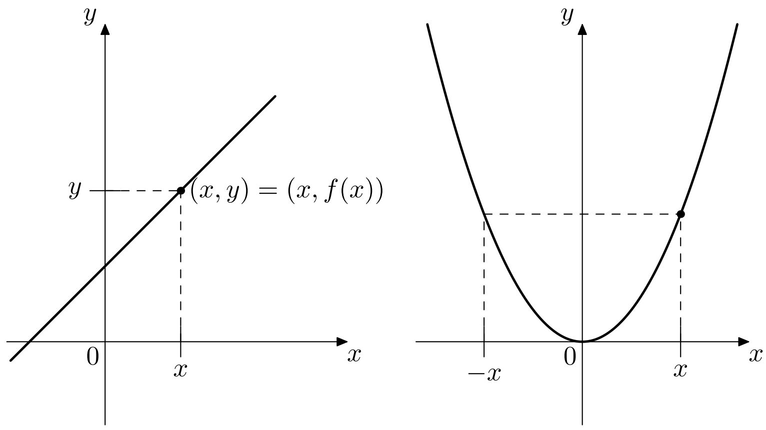
Definícia 4.3.2. Zobrazenie $f \colon X \to Y$ nazývame

a) *Prosté (= injektívne) zobrazenie* ak pre ľubovoľné $x \neq x'$ je $f(x) \neq f(x')$ (rôzne prvky z X majú rôzne obrazy).

b) *Zobrazenie na* (= surjektívne) ak pre každé $y \in Y$ existuje také $x \in X$, že $f(x) = y$ (na každý prvok $y \in Y$ sa zobrazí aspoň jeden prvok X).

Príklad 4.3.3. Na obrázku4.1 zobrazenie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definované predpisom $f(x) = x + 1$, tiež $f = \{(x, x + 1); x \in \mathbb{R}\}$ je prosté aj na, zobrazenie $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definované predpisom $g(x) = x^2$, alebo tiež $g = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$ nie je prosté (pre $x \neq 0$ dva rôzne prvky x a $-x$ dávajú tú istú hodnotu) a nie je na (záporné číslo nie obrazom žiadneho x.)

Je dobré si uvedomiť, že ak sa pýtame, či zobrazenie $f \colon X \to Y$ je na, tak je dôležitá aj množina Y. Napríklad ak by sme definovali zobrazenie $g \colon \mathbb{R} \to \langle 0, \infty)$ predpisom $g(x) = x^2$, tak je to zobrazenie na. (Čiže sme nezmenili predpis, iba cieľovú množinu – a po tejto zmene sme dostali surjektívne zobrazenie.)

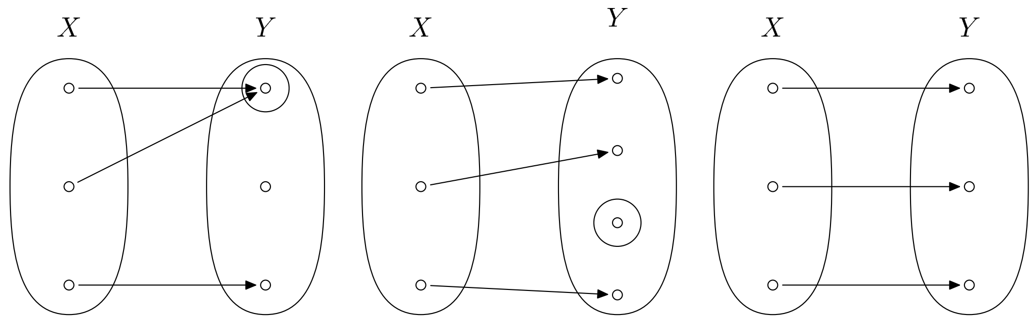


Obr. 4.1: Zobrazenia $f(x) = x + 1$ a $g(x) = x^2$

Definícia 4.3.4. Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je *bijektívne (= bijekcia),* ak je prosté a aj na.

Inými slovami: Zobrazenie $f\colon X \to Y$ je
- prosté, ak na každé $y \in Y$ zobrazí najviac jeden prvok z X;
- na, ak na každé $y \in Y$ zobrazí aspoň jeden prvok z X;
- bijektívne, ak na každé $y \in Y$ zobrazí práve jeden prvok z X.

Na obrázku 4.2 ľavý obrázok ilustruje situáciu, ktorá nesmie nastať, aby išlo o prosté zobrazenie (je tam prvok, na ktorý sa zobrazili dva rôzne prvky). Na prostrednom obrázku je situácia keď zobrazenie nie je na (máme prvok, na ktorý sa nezobrazil žiadny prvok z X), pravý obrázok ilustruje bijektívne zobrazenie.



Obr. 4.2:

Veta 4.3.5 (Princíp bijekcie)**.** *Nech X, Y sú konečné množiny. Ak existuje bijekcia z X do Y, tak množiny X a Y majú rovnakú veľkosť.*

Dôkaz. Nech $f\colon X \to Y$ je bijekcia. Zobrazenie f dáva do dvojíc prvky z X s prvkami z Y tak, že každá dvojica má jeden z X a druhý z Y. Keď f určuje m dvojíc, tak X aj Y majú m prvkov. □

Príklad 4.3.6. V galaxii Andromeda sa koná turnaj vo futbale, do ktorého sa prihlásilo 1 500 tímov. Turnaj sa koná systémom play-off, tím ktorý prehrá zo súťaže vypadne. Po koľkých hrách sa dozvieme víťaza turnaja?

Riešenie. Kľúčové pozorovanie je, že po každej hre vypadne jeden tím, t.j.každej hre odpovedá tím ktorý prehrá. Hry a prehrávajúce tímy v týchto hrách tvoria dvojice, ktoré zodpovedajú bijektívnemu zobrazeniu z množiny všetkých hier do množiny porazených tímov. Keďže porazených je 1 499, víťaza sa dozvieme po 1 499 hrách. □

Tvrdenie 4.3.7. *Počet podmnožín n prvkovej množiny je rovný 2^n.*

Dôkaz. Definujme zobrazenie f z množiny všetkých podmnožín množiny $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ do množiny slov dĺžky n v abecede $\{0, 1\}$ nasledovne: Pre každú $B \subseteq A$

$$B \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{ak } a_i \in B, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

pre všetky i.

Ľahko vidno, keďže dve slová sa rovnajú práve vtedy keď sa rovnajú po zložkách, že f je bijekcia. □

Konkrétne, pre $n = 3$, podmnožiny množiny $\{a, b, c\}$ a im zodpovedajúce slová z $\{0, 1\}^3$ sú v nasledujúcej tabuľke uvedené v poradí, ktoré zodpovedá prechádzke po trojrozmernej kocke Q_3 znázornenej na obrázku 4.3.

podmnožiny	$\xrightarrow{bijekcia}$	slová		
$\emptyset$	$\mapsto$	0	0	0
$\{a\}$	$\mapsto$	1	0	0
$\{a,b\}$	$\mapsto$	1	1	0
$\{b\}$	$\mapsto$	0	1	0
$\{b,c\}$	$\mapsto$	0	1	1
$\{a,b,c\}$	$\mapsto$	1	1	1
$\{a,c\}$	$\mapsto$	1	0	1
$\{c\}$	$\mapsto$	0	0	1

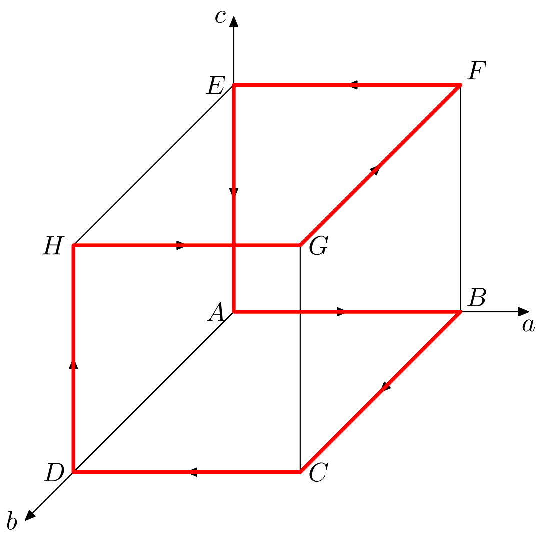
Zovšeobecnenie pre ľubovoľné $n \geq 2$ je zformulované v nasledujúcom príklade.

Príklad 4.3.8. Ukážte, že v kocke Q_n, $n \geq 2$, sa nájde prechádzka po vrcholoch a hranách kocky, ktorá začína aj končí v tom istom vrchole a každý iný vrchol navštívi presne raz.

Riešenie. Touto témou sme sa zaoberali už v časti 1.3.1. Pripomeňme, že vrcholy kocky Q_n zodpovedajú slovám z $\{0, 1\}^n$ a dva vrcholy sú spojené hranou ak sa líšia v jednej súradnici. Teda ide vlastne o úlohu vymenovať všetkých 2^n usporiadaných n-tíc z $\{0, 1\}^n$ takým spôsobom, že ľubovoľné dve po sebe idúce sa budú líšiť iba v jedinej súradnici. A navyše, keďže sa chceme vrátiť do toho istého vrchola, tak aj posledná n-tica sa od prvej musí líšiť práve jednou súradnicou. Takéto usporiadanie n-tíc núl a jednotiek sa nazýva *Grayov kód.* Má aplikácie v praxi, napríklad v samoopravných kódoch. Vyššie sme vlastne videli Grayov kód pre $n = 3$. Ekvivalentne, vzhľadom na tvrdenie4.3.7, úlohou je dať zoznam všetkých podmnožín $n \geq 2$ prvkovej množiny, v ktorom sa dve po sebe idúce množiny líšia v jedinom prvku a to vrátane prvej a poslednej množiny na zozname.

Existenciu prechádzky dokážeme indukciou podľa n. Pre $n = 2, 3, 4$ sme platnosť existencie prechádzky už overili v časti 1.3.1.

Predpokladajme platnosť tvrdenia pre $n \geq 4$ a uvažujme kocku Q_{n+1}. Vrcholy kocky Q_{n+1} rozdelíme do dvoch skupín. V prvej skupine L sú všetky vrcholy s poslednou zložkou



Obr. 4.3: Prechádzka po kocke Q_3

$x_{n+1} = 0$, tj vrcholy tvaru $v0$, kde $v = x_1 \dots x_n$ je vrchol kocky Q_n. Podobne v druhej skupine P sú všetky vrcholy s poslednou zložkou $x_{n+1} = 1$, tj vrcholy tvaru $v1$, kde $v = x_1 \dots x_n$ je vrchol kocky Q_n. Inak povedané, Q_{n+1} pozostáva z dvoch kópií kocky Q_n, pričom dva vrcholy z rôznych kópií sú spojené hranou práve vtedy, keď sa líšia v poslednej zložke.

Podľa indukčného predpokladu, v Q_n existuje požadovaná prechádzka, označme ju symbolom W. Nech

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2^n}$$

je poradie vrcholov kocky Q_n určené prechádzkou W . Prechádzku rozšírime na prechádzku v Q_{n+1} nasledujúcim spôsobom. Prechádzky

$$v_1 0, v_2 0, v_3 0, \dots, v_{2^n} 0, \quad \text{prechádzka v časti } L,$$

$$v_1 1, v_2 1, v_3 1, \dots, v_{2^n} 1, \quad \text{prechádzka v časti } P,$$

určujú prechádzku

$$v_1 0, v_2 0, v_3 0, \dots, v_{2^n} 0, v_{2^n} 1, \dots, v_3 1, v_2 1, v_1 1$$

v Q_{n+1}.

Overili sme platnosť indukčného kroku, a tým je tvrdenie dokázané. □

4.4 Princíp počítania dvomi spôsobmi

Keď dve formuly (vzorce, výrazy) vyjadrujú veľkosť tej istej množiny, tak sa rovnajú.

Tento princíp umožňuje odvodiť zaujímavé identity, a to kombinatorickou interpretáciou ľavej strany a pravej strany identity (rovnosti dvoch formúl).

Príklad 4.4.1. Podľa tvrdenia 4.3.7, množina $\mathcal{P}(N)$ všetkých podmnožín n-prvkovej množiny N má veľkosť $|\mathcal{P}(N)| = 2^n$.

Na druhej strane podľa sčítacieho princípu je $|\mathcal{P}(N)| = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Preto

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{4.5}$$ {04pocit:SUMB

Príklad 4.4.2. Letná škola z matematiky má 15 účastníkov a každý deň sú traja z nich zamestnaní prípravou pomôcok, príkladov, atď. Po skončení letnej školy sa zistilo, že každá dvojica študentov bola zamestnaná presne raz. Koľko dní trvala letná škola?

Riešenie. Počítaním dvomi spôsobmi. Čo budeme počítať dvomi spôsobmi? Máme
- dvojice študentov $\{x, y\} = \{y, x\}$;
- dni letnej školy

Množinu dní keď trvala škola označme $\mathscr{D}$, množinu študentov označme S. Dvomi spôsobmi určíme počet takých dvojíc

$$(\{x, y\}, D) \in S \times \mathscr{D},$$

že dvojica $\{x, y\}$ bola zamestnaná v deň D. Uvažujme tabuľku

	D_1	D_2	$\dots$	D_j	$\dots$	D_x
A_1						
A_2						
$\vdots$						
A_i				0, 1 ?		
$\vdots$						
$A_{\binom{15}{2}}$						

kde v riadku A_i a stĺpci D_j napíšeme

$$\begin{cases} 1 & \text{ak dvojica } A_i \text{ pracovala v deň } D_j, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Dvomi spôsobmi určíme počet jednotiek v tabuľke. Pozrieme sa na počet jednotiek v jednotlivých riadkoch (a sčítame tieto počty cez riadky). Takisto zistíme počet jednotiek v jednotlivých stĺpcoch (a sčítame cez stĺpce).

Ideme teda počítať koľko jednotiek máme v tabuľke:

a) V každom riadku máme 1 jednotku (každá dvojica bola zamestnaná práve raz)

$$\text{počet jednotiek v tabuľke} = \binom{15}{2} \cdot 1.$$

b) V každom stĺpci máme tri jednotky, lebo z troch študentov, ktorí boli zamestnaní v deň D môžeme utvoriť 3 dvojice.

$$\text{počet jednotiek v tabuľke} = 3 \cdot x.$$

Celkovo:

$$\binom{15}{2} = 3 \cdot x$$
$$x = \binom{15}{2} / 3.$$

$\square$

Určíme teraz vzorec pre výpočet hodnoty $\binom{n}{2}$. Špeciálne budeme vedieť hodnotu $\binom{15}{2}$, a teda poznať hodnotu čísla x.

Príklad 4.4.3. Koľkými spôsobmi môžeme utvoriť 2-členný výbor z n študentov? Ekvivalentne, koľko 2-podmnožín má n-množina?

Riešenie. $\binom{n}{2} = 0$ pre $n = 0, 1$.

Nech $n \geq 2$. Každý študent dostane kartičku, presne jednu medzi $1, \ldots, n$. Máme

$$\{\text{študenti}\} = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Všetky $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ rozdelíme do skupín podľa najmenšieho prvku i v podmnožine, $1 \leq i \leq n - 1$.

i	2-podmnožiny	počet
1	$\{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{1, n-1\}, \{1, n\}$	$n - 1$
2	$\{2,3\}, \ldots, \{2, n-1\}, \{2, n\}$	$n - 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n - 1$	$\{n - 1, 1\}$	1

Podľa sčítacieho princípu

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = ?$$

(Pozri aj úlohu 3.5.2.)

Tento súčet vieme vypočítať viacerými spôsobmi:

1) Reorganizáciou sčítancov

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + \cdots + (n-1) = s \\ (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = s \\ \hline n + n + \cdots + n = 2s \end{array}$$

Vidíme, že sme získali $(n - 1)$ sčítancov, z ktorých každý je rovný s, a teda

$$\frac{n(n-1)}{2} = s.$$

2) Iná možnosť je experimentovať s malými hodnotami n. Po vyskúšaní niekoľkých hodnôt prídeme k hypotéze, že súčet je rovný $n(n-1)/2$. Platnosť hypotézy dokážeme matematickou indukciou.

3) Keď sa pozrieme na „tabuľku“ vidíme, že počet 2 prvkoých podmnožín zodpovedá počtu guličiek v tabuľke nad diagonálou, pre $n = 5$.

	1	2	3	4	5
1	•	•	•	•	•
2	•	•	•	•	•
3	•	•	•	•	•
4	•	•	•	•	•
5	•	•	•	•	•

V tejto tabuľke je $5 \cdot 5$ guličiek, všeobecne $n \cdot n$ guličiek. Tento počet súčasne môžeme vyjadriť ako

$$|\text{ guličky pod diagonálou }| + |\text{ guličky na diagonále }| + |\text{ guličky nad diagonálou }|.$$

Takže

$$\begin{aligned} n^2 &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i + n \\ n^2 - n &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i \\ \frac{n(n-1)}{2} &= \sum_{i=1}^{n-1} i \end{aligned}$$

Odvodili sme

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad n \geq 0.$$

(Všimnime si, že $n = 0$ aj $n = 1$ tomuto vzťahu vyhovuje.)

Keď sa vrátime k príkladu 4.4.2, môžeme povedať, že letná škola trvala $\binom{15}{2}/3 = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 = 35$ dní. $\square$

4.5 Zhrnutie

Pomenovali sme základné spočítavacie princípy: sčítací princíp, násobiaci príncíp, princíp bijekcie a princíp počítania dvomi spôsobmi. Tieto princípy v neformálnej podobe pozná každý, v priebehu stáročí vykryštalizovali do dnešnej všeobecnej a formálnej podoby. Práve všeobecnosť a elementárnosť týchto princípov umožňuje ich aplikáciu takpovediac všade, v každej disciplíne, kde sa „niečo“ počíta. Na druhej strane, práve všestrannosť týchto princípov spôsobuje, že ich aplikácia na konkrétne situácie je umenie počítať.

4.6 Cvičenia

Úloha 4.6.1. Zdôvodnite, že ak $f: X \to Y$ je zobrazenie a X, Y sú konečné množiny, tak:
a) Ak f je injekcia, tak $|X| \leq |Y|$.
b) Ak f je surjekcia, tak $|Y| \leq |X|$.
(Hint: Dá sa to riešiť rôznymi spôsobmi, v jednej z častí sa dá použiť aj holubníkový princíp.)

Úloha 4.6.2. Nech $f: A \to A$ je zobrazenie, A je konečná množina. (Dôležité je, že ide z množiny A do tej istej množiny.) Dokážte, že:
a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.
Inými slovami to hovorí, že ak takéto zobrazenie spĺňa jednu zo spomenutých dvoch podmienok (injektívnosť, surjektívnosť), tak automaticky musí spĺňať aj tú druhú. Skúste tiež zistiť, či by to platilo aj ak A nie je konečná. (Hint: Dá sa to riešiť rôznymi spôsobmi. V jednej z častí sa dá použiť holubníkový princíp. Prípadne sa odvolať môže pomôcť aj úloha 4.6.1, ktorú už máme dokázanú.)

Úloha 4.6.3. V istom hoteli sa rozhodli očíslovať izby od 1 do 100 (hotel má 100 izieb). Koľkokrát použili šablónu čísla šesť? Bol by výsledok rovnaký pre číslo päť?

Úloha 4.6.4. Reštaurácia ponúka 5 rôznych polievok, 10 druhov hlavných jedál a 6 rôznych dezertov. Ivan sa rozhodol, že si objedná najviac jednu polievku, najviac jedno hlavné jedlo a najviac jeden dezert. Koľkými spôsobmi sa mohol rozhodnúť?

Úloha 4.6.5. Heslo má šesť až osem znakov, aspoň jeden z nich je cifra. Koľko rôznych hesiel môžeme mať? (Používame len alfanumerické znaky.) Aký sa zmení výsledok v závislosti od toho, či rozlišujeme veľké a malé písmená alebo nie?

Úloha 4.6.6. Na internátoch sa uvoľnilo 100 miest: 40 na Ľ. Štúra, 34 na Átriákoch, 26 na manželskom internáte. Koľkými spôsobmi môže ubytovacia komisia rozdeliť tieto voľné miesta medzi 100 žiadateľov? Aby to nemala veľmi zložité, každému povie len na ktorý internát ho zaradila. O konkrétnom mieste sa musí uchádzač dohodnúť s ostatnými.

Úloha 4.6.7. Máme k dispozícii 3 kusy jednej knihy, 2 kusy druhej a 1 kus tretej. Koľkými spôsobmi môžeme knihy rozdeliť medzi 20 ľudí ak nikto nedostane viac ako jednu knihu? A koľkými ak nikto nedostane dva exempláre tej istej knihy ale môže dostať 2 alebo 3 knihy?

Úloha 4.6.8. Majme dané dve rovnobežky p a q. Na p zvoľme n rôznych bodov a na q zvoľme m rôznych bodov. Koľko je trojuholníkov s vrcholmi vo zvolených bodoch?

Úloha 4.6.9. 33 študentov chceme rozdeliť na tri 11-členné futbalové tímy. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť?

Úloha 4.6.10. Koľkými spôsobmi je možné vybrať 11-členný futbalový tím a 5-členný basketbalový tím z 30-tich študentov, ak
a) Nikto nebude v oboch tímoch.
b) Ľubovoľný počet študentov môže byť v oboch tímoch.
c) Najviac jeden študent bude v oboch tímoch.

Úloha 4.6.11. Senát pozostáva zo 100 senátorov z 50-tich štátov, každý štát je reprezentovaný dvomi senátormi. Koľkými spôsobmi je možné zvoliť štvorčlenný výbor keď požadujeme, aby vo výbore neboli dvaja senátori z toho istého štátu?

Úloha 4.6.12. V galaxii Andromeda sa konal turnaj vo futbale, ktorého sa zúčastnilo 49 klubov. Zástava každého klubu pozostáva z troch vodorovných pruhov rôznej farby, pričom žiadna zástava nemá farbu rôznu od červenej, modrej, bielej a zelenej. Je pravda, že aspoň tri kluby majú totožnú zástavu?

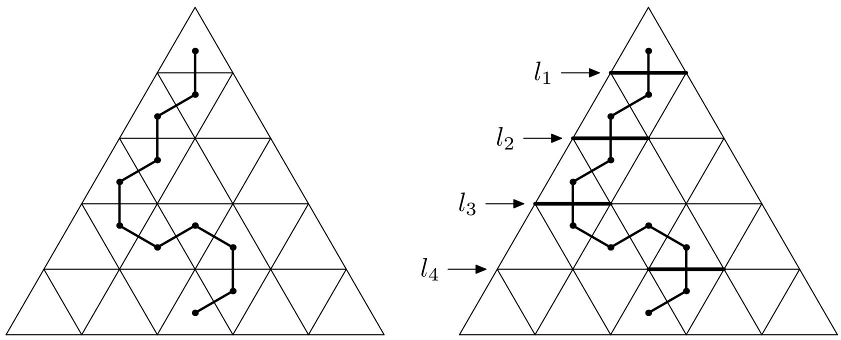
Úloha 4.6.13. Kombinatorickou úvahou dokážte:

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$

(Návod: určte počet istých podmnožín množiny M ktorá obsahuje prvky a, b, c.)

Úloha 4.6.14*. Uvažujme rovnostranný trojuholník s dĺžkou strany n, ktorý je rozdelený na jednotkové trojuholníky ako na obrázku pre $n = 5$. Nech $f(n)$ počet ciest z horného trojuholníka do trojuholníka v strede posledného riadku, pričom susedné trojuholníky na ceste majú spoločnú stranu, cesta nikdy nejde zdola nahor (z nižšieho riadku do vyššieho) a nikdy nevedie do trojuholníka ktorý už navštívila. Na obrázku je vyznačená jedna takáto cesta pre $n = 5$. Určte $f(2015)$. (Hint: Môže vám pomôcť porozmýšľať o vodorovných čiarach vyznačených na ďalšom obrázku.)[4]

[4]Úloha z kanadskej matematickej olympiády CMO 2005.



Úloha 4.6.15. Koľko kladných deliteľov má číslo 6? Tá istá otázka pre číslo 8, číslo 24, číslo $4 \cdot 25 \cdot 7$. Všeobecne: Koľko kladných deliteľov má kladné celé číslo n? (Hint: Môže pomôcť pozrieť sa na kanonický rozklad čísla n na prvočísla.)

Úloha 4.6.16. Koľko 5 ciferných kladných celých čísel so strednou cifrou 6 je deliteľných tromi? Ako by sa zmenil výsledok, ak by sme sa pýtali na deliteľnosť deviatimi?

Úloha 4.6.17. Koľko 5 ciferných kladných celých čísel ktoré obsahujú cifru 9 je deliteľných tromi? Ako by sa zmenil výsledok, ak by sme sa pýtali na deliteľnosť deviatimi?

Úloha 4.6.18. Pre kladné celé číslo n je hodnota Eulerovej funkcie $\phi(n)$ definovaná ako počet tých kladných celých čísel menších ako n, ktoré sú s n nesúdelitelné, pričom kladieme $\phi(1) = 1$. Napríklad, $\phi(2) = 2, \phi(3) = 2, \phi(4) = 2, \phi(8) = 4, \phi(15) = 8$, pre prvočíslo p máme $\phi(p) = p - 1$. Dokážte, že pre každé $n > 2$ je hodnota $\phi(n)$ párne číslo.

Úloha 4.6.19. Koľko je funkcií $\{1, \dots, n\}$ do $\{1, \dots, n\}$ ktoré nie sú bijektívne? Koľko je prostých funkcií z $\{1, \dots, k\}$ do $\{1, \dots, n\}$?

Úloha 4.6.20. Na poličke je 12 kníh. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 5 z nich? A koľkými tak aby žiadne dve ktoré sme vybrali nestáli na poličke vedľa seba? (Hint: Môžete sa zamyslieť nad tým, čo sa stane, keď chcete vybraté knihy povkladať naspäť.)

Úloha 4.6.21. Za okrúhlym stolom sedí 12 rytierov a vzťahy medzi nimi sú zložité – každý z nich sedí medzi svojimi nepriateľmi (iných nepriateľov za okrúhlym stolom nemá). Koľkými spôsobmi je možné vybrať 5 rytierov ktorí pôjdu zachrániť princeznú, keď medzi vybranými rytiermi nesmú byť žiadni dvaja znepriatelení?

Úloha 4.6.22. Máme 15 (rôznych) kníh, ktoré chceme uložiť na dve police. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť ak požadujeme, aby ani jedna z políc nezostala prázdna? (Rôzne poradia kníh na polici považujeme za rôzne možnosti.)

Úloha 4.6.23. Je dané prirodzené číslo $n > 2$ a množina M, ktorej prvkami sú slová dĺžky n v abecede $\{X, Y\}$ a akékoľvek dve rôzne slová sa líšia aspoň na troch miestach. Dokážte nerovnosť

$$|M| \leq \frac{2^n}{n+1}.$$

Hint: Položme $|M| = m$ a pre $1 \leq i \leq m$ nech M_i je množina slov, ktoré vzniknú z i-teho slova množiny M zámenou jediného písmena. Ukážte, že množiny M_i a M_j, $i \neq j$, sú disjunktné a $|M_i| = n + 1$ pre všetky i. Využite, že zjednotenie množín M_i je podmnožina množiny všetkých slov dĺžky n v abecede $\{X, Y\}$.

Úloha 4.6.24. Chceme vybrať 6 členov disciplinárnej komisie spomedzi štyroch študentov a ôsmich učiteľov. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť, ak v komisii musia byť aspoň traja študenti?

Úloha 4.6.25. Chceme vytvoriť 5-člennú komisiu, pričom členov vyberáme spomedzi 10 ľudí. Medzi týmito desiatimi ľuďmi sú traja z tej istej strany. Koľko máme možností, ak nemôžeme týchto troch ľudí dať všetkých do komisie?

Úloha 4.6.26. Spomedzi 8 dievčat a 7 chlapcov chceme zostaviť 5-členný tím. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť, ak musíme vybrať aspoň dve dievčatá a aspoň dvoch chlapcov.

Úloha 4.6.27. Ak sa súťaže zúčastní 11 tímov, koľko je možností pre to, ako bude nakoniec vyzerať stupeň víťazov (zlatá, strieborná a broznová medaila)?

Kapitola 5

Binomické koeficienty a podmnožiny

5.1 Definícia a vzťah pre $\binom{n}{k}$

Definícia 5.1.1. *Binomický koeficient* $\binom{n}{k}$ vyjadruje počet k-prvkových podmnožín n-prvkovej množiny.

V predchádzajúcej kapitole sme zistili rekurentný vzťah pre výpočet binomického koeficienta (pozri (4.3) v 4.1.3)

{05binom:EQREKUR}

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad k \geq 1 \tag{5.1}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \tag{5.2}$$

Odvodíme explicitnú formulu pre výpočet hodnoty $\binom{n}{k}$. K tomu budeme potrebovať prosté slová v danej abecede. Pripomeňme, že slovom dĺžky n v abecede A rozumieme prvok karteziánskeho súčinu A^n, ktorý zapisujeme v tvare $x_1, \dots, x_n$, kde $x_i \in A$ pre $i = 1, \dots, n$. Prvok x_i nazývame i-ta zložka slova. Pod pojmom *prosté slovo* budeme rozumieť také slovo, ktorého zložky sú navzájom rôzne.

Príklad 5.1.2. Nech $A = \{a, b, c\}$, potom

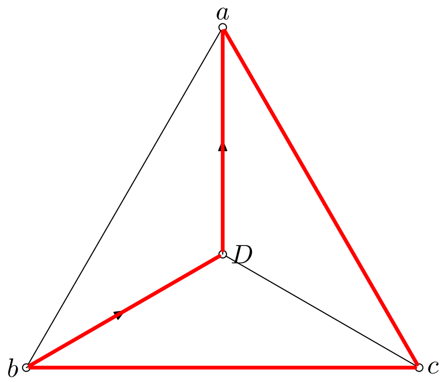
$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

sú všetky permutácie množiny A.

Príklad 5.1.3. Obchodný cestujúci potrebuje navštíviť tri mestá a, b, c, pričom cestu chce začať aj skončiť v meste D a každé mesto plánuje navštíviť presne raz. Koľkými spôsobmi môže zorganizovať svoju pochôdzku za predpokladu, že každé dve mestá sú priamo spojené komunikáciou?

Riešenie. Máme 6 možností ako naplánovať cestu a všetky sú vypísané v príklade 5.1.2.

Keďže nás zaujíma len počet prechádzok a nie možné trasy cesty, mohli sme k tomuto výsledku prísť jednoduchou úvahou: z mesta D máme 3 možnosti pre mesto, ktoré navštívime ako prvé. Pre každú z nich zostávajú dve možnosti pre mesto druhé a napokon zostalo jednoznačne určené mesto, ktoré navštívime ako posledné (a z neho pôjdeme do D). □



Tvrdenie 5.1.4. *Počet permutácií n-prvkovej množiny je rovný*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

(Čítame: „n faktoriál.“)

Dôkaz. Budeme aplikovať násobiaci princíp. Koľkými spôsobmi je možné utvoriť prosté slovo z A^n? Prvú zložku je možné zvoliť n spôsobmi. Pre každú takú voľbu máme $n-1$ možností ako zvoliť druhú zložku, pre každú voľbu prvej a druhej zložky je $n-2$ možností pre voľbu tretej zložky a tak ďalej, až pre voľbu $n-$ tej zložky máme jedinú možnosť.

Podľa násobiaceho princípu, hľadaný počet je

$$n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

□

Poznámka 5.1.5. Pre $n = 0$ sme definovali $A^0 = \{\emptyset\}$, a teda máme jediné slovo dĺžky 0, totiž $\emptyset$, ktoré je prosté. Preto

$$0! = 1.$$

Iné, menej formálne, zdôvodnenie je takéto: Predpokladajme, že v jednej miestnosti je m ľudí a v druhej miestnosti je n ľudí. Koľkými spôsobmi môžeme zoradiť do radu ľudí v prvej miestnosti a potom v druhej miestnosti? Odpoveď je $m! \cdot n!$. Ak v druhej miestnosti nikto nie je, stále môžeme zoradiť ľudí v prvej miestnosti $m!$ spôsobmi. Teda $m! \cdot 0! = m!$ a tak $0! = 1$.

Budeme vidieť ešte viacero ďalších situácií, kde potrebujeme mať $0! = 1$, ak chceme, aby platil nejaký vzťah aj pre nulu. Napríklad vzorec(5.3) pre binomický koeficient $\binom{n}{k}$.

Definícia 5.1.6. *k-permutácia* n-prvkovej množiny A je prosté slovo v abecede A dĺžky k.

Tvrdenie 5.1.7. *Počet k-permutácií n-prvkovej množiny A je rovný*

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Dôkaz. Dvomi spôsobmi spočítame počet permutácií množiny A. .

- tento počet je rovný $n!$;
- tento počet určíme tak, že permutácie rozdelíme do skupín podľa toho, akým slovom dĺžky k začínajú.

Pre $w = x_1 \dots x_k$ položme

$$B(w) = \text{ permutácie } A \text{ tvaru } \underbrace{x_1 \dots x_k}_{w} x_{k+1} \dots x_n.$$

Potom $|B(w)| = (n-k)!$, lebo toľko je permutácií množiny $A \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$, ktorými môžeme doplniť w na permutáciu množiny A.

Pre rôzne w a w' je $B(w) \cap B(w') = \emptyset$.

Podľa sčítacieho princípu máme

$$\begin{aligned} |\text{permutácie } A| &= \left| \bigcup_w B(w) \right| = \sum_w |B(w)| \\ &= \sum_w (n-k)! = |k\text{-permutácie A}| \cdot (n-k)! \end{aligned}$$

Záver:

$$\begin{aligned} n! &= |k\text{-permutácie A}| \cdot (n-k)! \\ |k\text{-permutácie A}| &= \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))(n-k)!}{(n-k)!} \\ &= n(n-1)\cdots(n-(k-1)). \end{aligned}$$

□

Poznámka 5.1.8. k-permutácie množiny A, $|A| = n$, poznáte pod názvom *variácie k-tej triedy bez opakovania z n prvkov* množiny A.

Teraz máme všetko pripravené k odvodeniu sľúbenej formuly pre binomický koeficient $\binom{n}{k}$.

Tvrdenie 5.1.9. *Pre $0 \le k \le n$ platí*

{05binom:EQBINOM}

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{5.3}$$

Dôkaz. Dvomi spôsobmi určíme počet k-permutácií množiny A. Vieme, že tento počet je $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ podľa tvrdenia 5.1.7.

Na druhej strane, označme $P_k(A)$ systém všetkých k-podmnožín množiny A. Pre $B \in P_k(A)$ nech $W(B)$ je množina všetkých k-permutácií množiny B, teda

$$|W(B)| = k!$$

Pre rôzne B a B' z $P_k(A)$ sú množiny $W(B)$ a $W(B')$ disjunktné a každá k-permutácia množiny A patrí do niektorej z týchto množín. Podľa sčítacieho princípu platí

$$\begin{aligned} \text{počet } k\text{-permutácií } A &= \left| \bigcup_{B \in P_k(A)} W(B) \right| \\ &= \sum_{B \in P_k(A)} |W(B)| = |P_k(A)| \cdot k! \end{aligned}$$

Záver:

$$\begin{aligned} n(n-1)\cdots(n-k+1) &= |P_k(A)| \cdot k! \\ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} &= |P_k(A)| \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} &= |P_k(A)| \end{aligned}$$

□

Poznámka 5.1.10. Pri výpočtoch a manipulácii s binomickými koeficientami sa nám často bude hodiť aj vyjadrenie v tvare

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}. \tag{5.4}$$ {05binom:EQBINOMFALLING}

Poznámka 5.1.11. k-prvkové podmnožiny množiny A, $|A| = n$, zodpovedajú pojmu *kombinácie k-tej triedy z n-množiny A*, s čím ste sa stretli na strednej škole. Ekvivalentne - zodpovedajú neusporiadaným výberom k prvkov z n-množiny.

5.2 Výber s opakovaním

Spočítali sme počet možností ako zvoliť k prvkov z n prvkovej množiny, pričom na poradí v akom boli zvolené nezáleží. Neformálne, určili sme koľkými spôsobmi je možné zvoliť k členný výbor z n študentov. Nasledujúci príklad ilustruje situáciu, keď sa prvky vo výbere môžu opakovať.

Príklad 5.2.1 (Nákup zákuskov)**.** V cukrárni predávajú dobošky, veterníky, laskonky a špice. Koľkými spôsobmi si môžeme kúpiť 10 zákuskov? Predpokladáme, že z každého druhu je v ponuke aspoň 10 kusov.

Riešenie. Na poradí v akom sú zákusky uložené v krabičke nezáleží, preto sa dohodnime, že ako prvé budú dobošky, za nimi veterníky, potom laskonky a nakoniec špice. Povedzme že sme kúpili $3 \times d$, $2 \times l$, $2 \times v$, $3 \times s$. Tento nákup zakódujme ako slovo v abecede $\{0, 1\}$

$$1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ .$$

Podobne nákup $5 \times d$, $3 \times l$, $2 \times s$ reprezentujme ako slovo

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ .$$

Spôsob kódovania bude vo všeobecnosti takýto: Do riadku budeme zľava doprava zapisovať

- toľko 1, koľko máme dobošiek, nasleduje 0;
- toľko 1, koľko máme laskoniek, nasleduje 0;
- toľko 1, koľko máme veterníkov, nasleduje 0;
- a toľko 1, koľko máme špicov.

Všeobecne: Nákup zodpovedá slovu dĺžky $10 + 3$ v abecede $\{0, 1\}$, ktoré obsahuje 10×1 a 3×0. Zrejme rôznym nákupom odpovedajú rôzne slová a každé slovo reprezentuje nejaký nákup. Máme teda bijekciu z množiny všetkých nákupov do množiny všetkých slov takéhoto tvaru.

Záver: Desať zákuskov môžeme kúpiť $\binom{10+3}{3}$ spôsobmi. □

Interpretácia: Máme prvky $n = 4$ druhov, t.j. dobošky, laskonky, veterníky, špice, z každého druhu aspoň $k = 10$ exemplárov. Potrebujeme vybrať 10 prvkov, pričom na poradí v akom vyberáme prvky nezáleží. Počet realizácií je rovný $\binom{10+3}{3}$. Na strednej škole ste používali pre takúto situáciu termín *k-kombinácie s opakovaním z n-množiny.* Môžete tento termín používať aj naďalej, hoci – ako o chvíľu uvidíme – je možná aj interpretácia pomocou slov.

Tvrdenie 5.2.2. *Počet nezáporných celočíselných riešení rovnice*

{05binom:EQSTARBARS}
$$x_1 + \cdots + x_n = k,\ k \geq 0 \tag{5.5}$$

je rovný

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Tento výsledok môžeme tiež vyjadriť (na základe rovnosti (5.11) z úlohy 5.4.1) ako

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Dôkaz. Budeme postupovať ako pri riešení predchádzajúceho príkladu. Definujeme zobrazenie

$$\begin{aligned} f\colon \text{riešenia (5.5)} &\to \text{slová v } \{0,1\}^{n+k-1} \text{ s } k \text{ jednotkami a } (n-1) \text{ nulami} \\ x_1, \dots, x_n &\mapsto \underbrace{1\dots1}_{x_1\text{-krát}}0\underbrace{1\dots1}_{x_2\text{-krát}}0\dots0\underbrace{1\dots1}_{x_n\text{-krát}} \end{aligned}$$

Zobrazenie f je bijekcia, a tak hľadaný počet riešení je $\binom{n+k-1}{k}$. □

Príklad 5.2.3. V osudí je n balónikov očíslovaných s číslami 1 až n. Losuje sa k čísel, pričom po vylosovaní daného čísla sa príslušný balónik vráti do osudia. Koľkými spôsobmi môže losovanie dopadnúť? Predpokladáme, že na poradí v akom boli čísla vylosované nezáleží.

Riešenie 1. Na poradí, v akom boli čísla vylosované nezáleží, preto stačí poznať počet 1, počet 2, atd., počet n medzi vylosovanými číslami. Predpokladajme, že bolo vylosované x_1-krát číslo 1, x_2-krát číslo $2\dots, x_n$-krát číslo n, pričom $x_1 + \cdots + x_n = k$, $x_i \geq 0$. Zaujíma nás teda počet nezáporných celočíselných riešení tejto rovnice. Podľa tvrdenia 5.2.2 ten počet je $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$. □

Riešenie 2. Vylosované čísla môžeme usporiadať, a to jednoznačne, podľa veľkosti

{05binom:EQLOS1}
$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n. \tag{5.6}$$

Potom počet možností ako môže dopadnúť losovanie je rovný počtu takýchto postupností.

Postuposť (5.6) prevedieme na (5.7):

{05binom:EQLOS2}
$$1 \leq a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < \cdots < a_k + (k-1) \leq n + (k-1). \tag{5.7}$$

Zrejme rôznym postupnostiam tvaru (5.6) odpovedajú rôzne postupnosti tvaru (5.7). Obrátene, každej postupnosi tvaru (5.7) odpovedá postupnosť tvaru (5.6).

Takto zobrazenie, ktoré postupnosi (5.6) priradí postupnosť (5.7) je bijekcia. Preto počet postupností (5.6) je rovný počtu postupností (5.7).

K určeniu počtu postupností tvaru (5.7) stačí povedať, ktorých k prvkov z $\{1, 2, \dots, n + (k-1)\}$ zvolíme, keďže tieto je možné jediným spôsobom usporiadať podľa veľkosti.

Záver: k čísel je možné vylosovať

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

spôsobmi. $\square$

Príklad 5.2.4. Koľko je k-podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, ktoré neobsahujú dve po sebe idúce čísla?

Riešenie. Opäť na poradí čísel v množine nezáleží, preto každej k-podmnožine množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ zodpovedá (jediné) zoradenie jej prvkov od najmenšieho po najväčší.

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n. \tag{5.8}$$ {05binom:EQNESUS1}

Úlohu by sme vedeli riešiť, ak by boli povolené po sebe idúce čísla. Preveďme teda (5.8) na tvar

$$1 \leq a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < \cdots < a_k - (k-1) \leq n - (k-1). \tag{5.9}$$ {05binom:EQNESUS2}

Takýto prevod je bijekcia z množiny požadovaných k-podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ do množiny všetkých k-podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n-(k-1)\}$.

Preto hľadaný počet je

$$\binom{n-k+1}{k}.$$

$\square$

Situáciu pomenujeme: Slovo $x_1 \ldots x_k$ dĺžky k v abecede $A = \{1, \ldots, n\}$ nazveme *monotónne,* ak

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k.$$

Potom počet takýchto slov je rovný

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Poznámka 5.2.5. Podobne môžeme postupovať aj v prípade, že abeceda nepozostáva z čísel. Napríklad, ak $A = \{a, b, \triangle, *\}$, tak zvolíme pevné poradie $a < b < \triangle < *$ prvkov množiny A. Keď a premenujeme na 1, b na 2, $\triangle$ na 3 a $*$ na 4, tak

$$aaabb\triangle\triangle\triangle\triangle* \leftrightarrow 1112233334$$

a monotónne slová v $A = \{a < b < \triangle < *\}$ korešpondujú s monotónnymi slovami v $A' = \{1 < 2 < 3 < 4\}$.

Napokon, zvážme situáciu keď na poradí záleží.

Príklad 5.2.6. Schému v príklade 5.2.1 pozmeníme: 10 kamarátov si objednalo 4 dobošky, 3 laskonky, 2 veterníky a 1 špicu každý jeden kúsok. Keď pani cukrárka priniesla objednávku, náhodne každému poddala tanierik so zákuskom. Aká je pravdepodobnosť, že každý dostal presne ten druh, ktorý si objednal?

Riešenie 1. Hľadaná pravdepodobnosť je 1/počet všetkých možností. Koľko je slov $x_1 x_2 \ldots x_{10}$ v abecede $A = \{d, l, v, s\}$ takých, že 4 zložky sú d, 3 zložky sú l, 2 zložky sú v a 1 zložka je s? Tento počet zistíme, keď povieme

- ktoré 4 z 10 zložiek sú d;
- ktoré 3 z $(10-4)$ zložiek sú l;
- ktoré 2 z $(10-4-3)$ sú v;
- ktorá zložka z $(10-4-3-2)$ je s.

$$\binom{10}{4}\binom{10-4}{3}\binom{10-4-3}{2}\binom{10-4-3-2}{1} = \frac{10!}{4!6!}\cdot\frac{6!}{3!3!}\cdot\frac{3!}{2!1!}\cdot\frac{1!}{1!0!} = \frac{10!}{4!3!2!1!} = 12\,600.$$

Hľadaná pravdepodobnosť je $1/12600 \doteq 0,000\,079\,365$. $\square$

Riešenie 2. Môžeme postupovať aj takto: zákusky očíslujeme: $d_1, d_2, d_3, d_4, l_1, l_2, l_3, v_1, v_2, s_1$.

Koľko je permutácii tejto novej množiny? Je ich 10!. Tieto rozdelíme do skupín podľa toho, či reprezentujú to isté slovo w v abecede $\{d, l, v, s\}$. V jednej skupine máme 4!3!2!1! permutácií a pre rôzne slová w, w' sú tieto skupiny disjunktné. Podľa sčítacieho princípu dostaneme

$$10! = |\text{ uvažované slová v abecede } \{d, l, v, s\}| \cdot 4!3!2!1!.$$

Záver: Počet hľadaných slov je

$$\frac{10!}{4!3!2!1!} = 12\,600.$$

$\square$

Tvrdenie 5.2.7. *Počet slov v abecede $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ dĺžky $n = l_1 + \dots + l_k$, kde $l_i > 0$ pre $i = 1, \dots, k$, ktoré majú l_i zložiek rovných a_i (pre $i = 1, \dots, k$) je rovný*

{05binom:EQPERMOPAK}

$$\frac{n!}{l_1!l_2!\dots l_k!}. \tag{5.10}$$

Dôkaz. Postupujeme ako pri riešení príkladu 5.2.6 ľubovoľným z uvedených postupov. $\square$

Poznámka 5.2.8. Slová, ktorých počet sme odvodili v tvrdení 5.2.7 poznáte pod názvom *permutácie s opakovaním.*

5.3 Permutácie a bijekcie

Poznámka 5.3.1. Základným východiskom našich úvah boli slová v abecede A, čím sme rozumeli prvky $(x_1, \dots, x_k)$ karteziánskeho súčinu $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-krát}} = A^k$ (pravda, zapisovali sme ich v tvare $x_1 \dots x_k$).

Povieme si teraz o súvislosti takýchto objektov so zobrazeniami. Uvažujme zobrazenie $f\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d, e\}$. Zobrazenie f je jednoznačne určené tým, ako sa zobrazí každý prvok i, $i = 1, 2, 3, 4$. Napríklad:

$$\begin{aligned} f\colon \{1, 2, 3, 4\} &\to \{a, b, c, d, e\} \\ 1 &\mapsto b \\ 2 &\mapsto c \\ 3 &\mapsto b \\ 4 &\mapsto d \end{aligned}$$

- ekvivalentne: $f\colon \downarrow \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & b & d \end{smallmatrix}$;

- alebo ešte inak: $f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & c & b & d \end{smallmatrix}\right)$.

Všeobecne: Zobrazenie $f\colon \{1, 2, \dots, n\} \to A$ zapíšeme v dvojriadkovej schéme

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & k \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(i) & \dots & f(k) \end{pmatrix}.$$

Keď teraz každé zobrazenie $\{1, \dots, k\} \to A$ zapíšeme analogicky – t.j. keď prvý riadok bude vždy rovnaký, tak prvý riadok sa stane nepotrebným a f môžeme zapísať len pomocou druhého riadku. Potom zobrazenie

$$\mu\colon \text{(všetky zobrazenia } \{1, \dots, k\} \to A) \to \text{všetky slová dĺžky } k \text{ v abecede } A$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ f(1) & f(2) & \dots & f(k) \end{pmatrix} \mapsto f(1)f(2)\dots f(k)$$

je prosté a je na.

Podobne, k-permutácie množiny A korešpondujú s prostými zobrazeniami z $\{1, 2, \dots, k\}$ do A.

Pokiaľ ide o permutácie množiny A, môžeme povedať viac. Napríklad, pre $A = \{a, b, c, d\}$ zvoľme pevne poradia prvkov A, napríklad a, b, c, d. Ďalej, podobne ako v predošlom, bijekciu z A do A môžeme zapísať dvojriadkovou tabuľkou

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ f(a) & f(b) & f(c) & f(d) \end{pmatrix},$$

ktorá korešponduje s prostým slovom $f(a)f(b)f(c)f(d)$.

Inak povedané, môžeme definovať bijekciu z množiny všetkých bijekcií z A do A do množiny všetkých prostých slov dĺžky n v A.

Napríklad pre $A = \{a, b, c\}$ máme

$$\begin{array}{ccccccc} & \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{smallmatrix}\right) \\ \text{bijekcia} & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ & abc & acb & bac & bca & cab & cba \end{array}$$

Máme teda dva pohľady na tú istú vec – permutácie. Permutácie ako slová uvažujeme v prípade, keď nám skutočne ide o *poradie* prvkov danej množiny, napríklad v kombinatorike a špeciálne v informatike. Naproti tomu, množina všetkých bijekcií z A do A *je vybavená operáciou skladania zobrazení* a s touto operáciou tvorí grupu – štruktúru, ktorú študuje napríklad abstraktná algebra, stretnete sa s grupami v (lineárnej) algebre, v teórii čísel, pri vektorových priestoroch, atď. My sa permutáciami ako bijekciami zaoberať nebudeme.

5.4 Cvičenia

Úloha 5.4.1. Ukážte, že pre $0 \le k \le n$ platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{5.11}$$ {05binomcvic:EQDOPLN}

(Skúste to odvodiť zo vzorca pre binomický koeficient a aj kombinatorickou úvahou, prípadne aj indukciou alebo inými spôsobmi.)

Úloha 5.4.2. Koľko je takých 7 ciferných kladných celých čísel s rôznymi ciframi z $\{1, 2, \dots, 9\}$, že cifry 5 a 6 sa nevyskytujú vedľa seba?

Úloha 5.4.3. Koľkými spôsobmi je možné postaviť do radu 6 Angličanov, 7 Francúzov a 10 Turkov tak, aby každý Angličan stál medzi Francúzom a Turkom a žiadny Francúz nestál vedľa Turka?

Úloha 5.4.4. Do manéže nastupuje v rade za sebou 18 zverov, z ktorých je 5 levov, 6 tigrov a 7 leopardov. Koľko je rôznych nástupov ak žiadne dva tigre nesmú ísť bezprostredne za sebou?

Úloha 5.4.5. Uvažujme slová v abecede $\{0, 1\}$, ktoré majú m jednotiek a n núl. Určte počet slov, ktoré obsahujú presne k bežcov. (Bežcom rozumieme maximálny reťazec po sebe idúcich jednotiek. Napríklad slovo 1011100111110 má troch bežcov.)

Úloha 5.4.6. Študent medicíny má počas januára v rámci praxe v nemocnici odpracovať 5 dní. Nesmie však pracovať dva po sebe idúce dni. Koľkými spôsobmi sa dá vybrať päť dní kedy bude pracovať?

Úloha 5.4.7. Študent fyziky pracuje v laboratóriu päť dní počas posledného semestra jeho štúdia. Po každom dni v laboratóriu, analyzuje v pracovni aspoň šesť dní práve získané dáta kým sa opäť vráti do laboratória. Po poslednom dni v laboratóriu potrebuje desať dní na kompletizáciu správy o svojom výskume, ktorú predloží na konci posledného dňa semestra svojmu školiteľovi. Koľkými spôsobmi môže študent toto všetko realizovať ak predpokladáme, že semester má 105 dní?

Úloha 5.4.8. Predpokladajme, že výsledkom losovania je päť čísel, každé medzi 1 a 90. Losovanie prebieha tak, že vždy keď je vylosovaný balónik s číslom, tak balónik sa vráti späť do losovacieho bubna. Vyhráva ten hráč, ktorý uhádol všetkých päť čísel (na poradí v akom boli čísla vylosované nezáleží). Koľko tiketov si musíme kúpiť aby sme si mohli byť istí že vyhráme jackpot?

Úloha 5.4.9. Uvažujme všetky slová dĺžky n v abecede, ktorá pozostáva z k písmen. Dve slová považujeme za rovnaké, ak pri čítaní jedného slova zprava doľava dostaneme druhé slovo. Napríklad v abecede $\{K, A, T, \star, \bullet\}$ pre $n = 4$ slová KATA a ATAK považujeme za rovnaké, podobne slovo A $\star$ A $\bullet$ a slovo $\bullet$ A $\star$ A nepovažujeme za rôzne. Koľko rôznych slov máme?

Úloha 5.4.10. Koľko existuje celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ takých, že $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_3 > 3$, $x_4 \geq 0$?

Kapitola 6

Binomické koeficienty – vlastnosti, identity

6.1 Pascalov trojuholník

Pascalova formula (pozri (4.3)) v 4.1.3)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad k \geq 1 \tag{6.1}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \tag{6.2}$$

umožňuje binomické koeficienty zapisovať do schémy, ktorú poznáte ako *Pascalov trojuholník*. Môžeme ho znázorniť takto

$$\begin{array}{lllllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0} & \binom{8}{1} & \binom{8}{2} & \binom{8}{3} & \binom{8}{4} & \binom{8}{5} & \binom{8}{6} & \binom{8}{7} & \binom{8}{8}
\end{array}$$

alebo aj takto

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \qquad 1 \\
1 \qquad 2 \qquad 1 \\
1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1 \\
1 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1 \\
1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1 \\
1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad 20 \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1 \\
1 \qquad 7 \qquad 21 \qquad 35 \qquad 35 \qquad 21 \qquad 7 \qquad 1 \\
1 \qquad 8 \qquad 28 \qquad 56 \qquad 70 \qquad 56 \qquad 28 \qquad 8 \qquad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \qquad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \qquad \binom{2}{1} \qquad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \qquad \binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \qquad \binom{5}{1} \qquad \binom{5}{2} \qquad \binom{5}{3} \qquad \binom{5}{4} \qquad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \qquad \binom{6}{1} \qquad \binom{6}{2} \qquad \binom{6}{3} \qquad \binom{6}{4} \qquad \binom{6}{5} \qquad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \qquad \binom{7}{1} \qquad \binom{7}{2} \qquad \binom{7}{3} \qquad \binom{7}{4} \qquad \binom{7}{5} \qquad \binom{7}{6} \qquad \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0} \qquad \binom{8}{1} \qquad \binom{8}{2} \qquad \binom{8}{3} \qquad \binom{8}{4} \qquad \binom{8}{5} \qquad \binom{8}{6} \qquad \binom{8}{7} \qquad \binom{8}{8}
\end{array}$$

Pomocou Pascalovho trojuholníka môžeme, pre dané n a k, efektívne vypočítať $\binom{n}{k}$: Súčet dvoch susedných čísel v tom istom riadku je rovný číslu, ktoré je medzi nimi o riadok nižšie. Stačí preto používať len operáciu sčitovania a pamätať si predchádzajúci riadok. Vďaka súmernosti podľa zvislej osi stačí pracovať len s polovicou trojuholníka.

6.2 Súčty binomických koeficientov

Pascalov trojuholník je zdrojom zaujímavých identít, niektoré z nich odvodíme.

6.2.1 Súčet v riadku Pascalovho trojuholníka

Súčet čísel v riadku n je

06binom2:EQSUCETVRIADKU}

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{6.3}$$

Túto identitu sme odvodilli v 4.4.1. Neskôr uvidíme, že tento vzťah sa dá odvodiť aj z binomickej vety 6.3.1.)

6.2.2 Súčet párnych koeficientov

Tiež si môžeme všimnúť, že pre $n > 0$ je súčet binomických koeficientov $\binom{n}{k}$ pre párne k rovnaký ako pre nepárne k. Napríklad pre $n = 6$:

1	6	15	20	15	6	1	súčet
$\bullet$		$\bullet$		$\bullet$		$\bullet$	$32 = 1 + 15 + 15 + 1$
	$*$		$*$		$*$		$32 = 6 + 15 + 15 + 6$

Tvrdenie 6.2.1. *Pre celé číslo $n > 0$ platí*

2:EQPARNEPAR}

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k+1}. \tag{6.4}$$

Všimnime si, že pre $n = 0$ uvedená rovnosť neplatí.

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme pomocou násobiaceho princípu: Pre prvý, druhý až $(n-1)$-prvý prvok máme na výber dve možnosti, či bude, alebo nebude patriť do podmnožiny. Posledný prvok je už potom jednoznačne určený podľa toho, či chceme dostať párny alebo nepárny počet prvkov. Dostaneme takto 2^{n-1} možností ako utvoriť podmnožinu uvažovanej množiny.

Teraz dokážeme tvrdenie pomocou princípu bijekie. Uvažujme množinu A, ktorá má n prvkov. Pevne zvoľme nejaký prvok $a^* \in A$ (taký prvok existuje, lebo A je neprázdna). Definujme zobrazenie f z množiny všetkých nepárnych podmnožín do množiny včetkých párnych podmnožín nasledovne.

$$f\colon \text{párne podmnožiny} \to \text{nepárne podmnožiny}$$

$$f\colon B \mapsto \begin{cases} B \cup \{a^*\} & \text{ak } a^* \notin B, \\ B \setminus \{a^*\} & \text{ak } a^* \in B. \end{cases}$$

Všimnime si, ze f je zvlášť definované na dvoch disjunktných množinách a pre kazdú z nich ide o bijektívne zobrazenie. Celkovo je teda zobrazenie f bijektívne.

□

Dôsledok 6.2.2. *Pre celé číslo $n > 0$ platí*

$$\sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \tag{6.5}$$

{06binom2:EQSTRIEDAVE}

S touto identitou sa stretneme neskôr, je kľúčom k odvodeniu princípu inklúzie a exklúzie (výpočet $|M_1 \cup \dots \cup M_n|$, keď $M_1, \dots, M_n$ nie sú nutne navzájom disjunktné – veta 7.1.1.) Neskôr tiež uvidíme, že sa dá táto identita dostať z binomickej vety 6.3.1.

6.2.3 Monotónnosť v riadku

Koeficienty v riadku n rastú po hodnotu

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

a ďalej klesajú. Všeobecne ak porovnávame susedné binomické koeficienty, tak dostaneme (znamienko $\square$ zastupuje $<$, $=$, $>$; rovnosť ani nerovnosť sa žiadnou z uvedených úprav nezmení):

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &\;\square\; \binom{n}{k+1} \\ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} &\;\square\; \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} \\ 1 &\;\square\; \frac{n-k}{k+1} \\ k+1 &\;\square\; n-k \\ k &\;\square\; \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

Záver:

$$\begin{aligned} &\text{pre } k < \frac{n-1}{2}: && \binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}, \\ &\text{pre } k = \frac{n-1}{2}: && \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}, \\ &\text{pre } k > \frac{n-1}{2}: && \binom{n}{k} > \binom{n}{k+1}. \end{aligned}$$

Všimnime si, že prípad, keď sa rovnajú dva binomické koeficienty v strede, nastane iba ak $\frac{n-1}{2}$ je celé číslo, to znamená pre nepárne n.

6.2.4 Súčet po diagonále

Pozrime sa, čo sa môžeme povedať, keď spočítame binomické koeficienty s rovnakým „menovateľom“. Napríklad

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 = 20 = \binom{6}{3}.$$

Niečo podobné môžete vyskúšať pre iné podobné súčty. Všeobecne pre súčet po vedľajšej diagonále $\swarrow$ dostaneme:

Tvrdenie 6.2.3.

{06binom2:EQHOK1}

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1} \tag{6.6}$$

Dôkaz. Počítame $(k+1)$-podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, tieto rozdelíme do skupín podľa najväčšieho prvku $i+1$, $0 \le i \le n$, ktorý obsahujú, a aplikujeme sčítací princíp. $\square$

Podobne môžeme sčitovať po vedľajšej diagonále $\searrow$ ako napríklad

$$\binom{3}{0} + \binom{4}{1} + \binom{5}{2} + \binom{6}{3} + \binom{7}{4} = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70 = \binom{8}{4} = \binom{3+4+1}{4}$$

Všeobecne dostaneme:

Tvrdenie 6.2.4.

{06binom2:EQHOK2}

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{n} \tag{6.7}$$

Dôkaz.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{m} \overset{(6.6)}{=} \binom{m+n+1}{m+1} = \binom{m+n+1}{n}$$

$\square$

Pretože prvky, ktoré takto sčitujeme spolu s výsledkom tak trochu pripomínajú tvar hokejky, identite (6.6) aj (6.7) sa niekedy hovorí Hockey-stick identity, „hokejková“ identita.[1] Azda podobnosť aspoň trochu vidno, ak si naznačíme v Pascalovom trojuholníku uvedené súčty.

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

6.2.5 Súčet štvorcov

Nasledujúca identita nie je z Pascalovho trojuholníka „očividná“.

Môžete sa však ľahko presvedčiť, že platí pre niekoľko prvých n:

$$\begin{aligned}
2 &= 1^2 + 1^2\\
6 &= 1^2 + 2^2 + 1^2\\
20 &= 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2\\
70 &= 1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2
\end{aligned}$$

Tvrdenie 6.2.5.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \tag{6.8}$$

{06binom2:EQSTVORCE}

Táto rovnosť sa dá dostať aj ako špeciálny prípad Vandermondovej identity (6.14).

Dôkaz. Majme $2n$ guľôčok, z ktorých n je červených a n je modrých. Koľkými spôsobmi sa dá vybrať n spomedzi nich?

Na jednej strane je tento počet rovný $\binom{2n}{n}$. Na druhej strane, pre dané k máme $\binom{n}{k}$ možností na výber k modrých guľôčok. Pre každú z nich máme $\binom{n}{n-k}$ možností pre výber zvyšných $n-k$ červených guľôčok. Celkovo takýchto výberov bude

$$\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2.$$

Keď sčítame tieto hodnoty cez všetky možné k, dostaneme práve uvedenú sumu. □

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Hockey-stick_identity, https://www.artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Combinatorial_identity

Ak by ste to chceli zapísať „matematickejšie“, tak namiesto modrých a červených gulôčok môžete počítať n prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ a rozdeliť ich do skupín podľa toho, koľko obsahujú párnych a koľko nepárnych čísel, alebo tiež podľa toho, koľko čísel v podmnožine patrí do $\{1, 2, \dots, n\}$ a koľko je väčších ako n.

6.2.6 Dva kluby

Úloha 6.2.1. V meste N začínajú fungovať dva kluby A, B. Niektorí obyvatelia sa prihlásili do klubu A, niektorí do klubu B. Aká je pravdepodobnosť, že každý, kto podal prihlášku do A podal prihlášku aj do B, alebo obrátene?

Riešenie. Nech $N = \{1, 2, \dots, n\}$ je množina obyvateľov mesta. Pýtame sa na počet dvojíc $A, B \subseteq N$ takých, že $A \subseteq B$ alebo $B \subseteq A$.

Zvoľme pevne k a uvažuje k-prvkovú podmnožinu $A \subseteq N$. Počet možností pre B:

- počet množín B takých, že $A \subseteq B$ je 2^{n-k} (počet možností, ktorými môžeme vybrať podmnožinu $B \setminus A \subseteq N \setminus A$);
- počet množín B takých, že $B \subseteq A$ je 2^k

Celkovo máme

$$2^{n-k} + 2^k - 1,$$

lebo prípad $A = B$ sme započítali dvakrát. Záver:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2^{n-k} + 2^k - 1).$$

Iný spôsob ak môžeme spočítať počet dvojíc A, B takých, že $A \subseteq B \subseteq N$: Pre každé $i \in N$ máme tri možnosti

- $i \in A \wedge i \in B$;
- $i \notin A \wedge i \in B$;
- $i \notin A \wedge i \notin B$.

Celkovo máme 3^n možností.

Podobne máme 3^n možností pre $B \subseteq A \subseteq N$ a treba odpočítať 2^n, lebo každá podmnožina množiny N je započítaná dva razy.

Celkovo máme

$$2 \cdot 3^n - 2^n$$

požadovaných dvojíc.

Záver:

{06binom2:EQDVAKLUBY}
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2^{n-k} + 2^k - 1) = 2 \cdot 3^n - 2^n \tag{6.9}$$

a hľadaná pravdepodobnosť je

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2^{n-k} + 2^k - 1)}{2^n \cdot 2^n} = \frac{2 \cdot 3^n - 2^n}{2^n \cdot 2^n} = \frac{2 \cdot 3^n}{2^n \cdot 2^n} - \frac{1}{2^n} = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

□

6.3 Binomická veta

Chceme vyjadriť $(a+b)^n$ pre reálne (komplexné) čísla a, b.

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \dots & 1\cdot a + 1\cdot b = a+b \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \dots & a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \dots & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \dots & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4=(a+b)^4
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\
&= a\cdot(a+b)+a\cdot(a+b)\\
&= a\cdot a + a\cdot b + a\cdot a + a\cdot b\\
&= a^2+2ab+b^2
\end{aligned}
$$

Uvedené štyri členy zodpovedajú tomu, čo sme vybrali z prvej a z druhej zátvorky:

1	2
a	a
a	b
b	a
b	b

Roznásobenie dvojčlena – aplikovali sme distributívny zákon, komutatívny zákon a asociatívny zákon, ktoré umožnili sčítať rovnaké sčítance.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\
&= a(a+b)(a+b)+b(a+b)(a+b)
\end{aligned}
$$

1	2	3
a	a	a
a	a	b
a	b	a
a	b	b
b	a	a
b	a	b
b	b	a
b	b	b

Z každej zátvorky zvolíme a alebo b a utvoríme súčin, potom sčítame rovnaké sčítance.

Takto postupujeme aj vo všeobecnom prípade $(a+b)^n$. (Formálnejšie sa to dá zapísať matematickou indukciou – pozri aj úlohu 6.6.4.)

Čo nám takýto postup hovorí: Máme n zátvoriek, z k zátvoriek zvolíme a, zo zvyšných $(n-k)$ zátvoriek potom už zvolíme b (alebo obrátene), pričom $0 \le k \le n$.

Dokázali sme binomickú vetu:

Veta 6.3.1 (Binomická veta)**.** *Pre $a, b \in \mathbb{C}$ a celé číslo $n \geq 0$ platí*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{6.10}$$

{06binom2:EQB

Môžeme dostať tieto jej varianty:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} a^k b^{n-k}$$

keďže $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

keďže $a + b = b + a$, a teda $(a + b)^n = (b + a)^n$.

Pomocou binomickej vety, vhodnou voľbou čísel a, b, môžeme zostrojiť respektíve odvodiť rôzne identity. Napríklad, vzorec (6.3) pre súčet binomických koeficientov v riadku Pascalovho trojuholníka:

$$(1+1)^n = 2^n$$
$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k}$$
$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

a tak

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Z binomickej vety vieme odvodiť aj identitu (6.4)

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k+1}.$$

Dôkaz. Keď do binomickej vety dosadíme $a = b = 1$, resp. $a = -1$ a $b = 1$ tak dostaneme

$$2^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}$$
$$0 = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{k}$$

(Môžeme si všimnúť, že sme dostali dôsledok 6.2.2.)

Sčítaním týchto dvoch rovností dostaneme:

$$2^n + 0 = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} + \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{k}$$
$$2^n = 2 \cdot \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k}$$
$$2^{n-1} = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k}$$

Keď ich odčítame, tak máme:

$$\begin{aligned}2^n - 0 &= \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k} - \sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n}{k}\\ 2^n &= 2\cdot\sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k+1}\\ 2^{n-1} &= \sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k+1}\end{aligned}$$

□

Vieme odvodiť aj (6.9)

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}(2^{n-k}+2^k-1) &= \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}2^{n-k} + \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}2^k - \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\\ &= (1+2)^n + (1+2)^n - 2^n\\ &= 2\cdot 3^n - 2^n\end{aligned}$$

Ukážme si ešte, ako pomocou binomickej vety môžeme získať identitu o súčte štvorcov binomických koeficientov v riadku (6.8).

Príklad 6.3.2. Chceme ukázať, že

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Z binomickej vety vieme, že

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k.$$

To znamená, že koeficient pri x^n je presne $\binom{2n}{n}$.

Súčasne ten istý polynóm môžeme vyjadriť v tvare

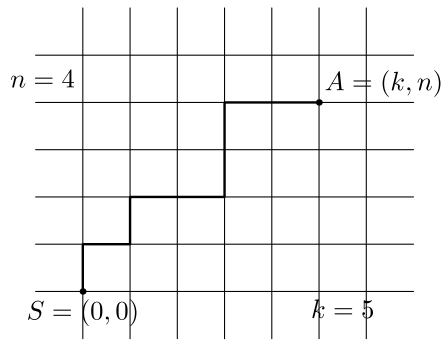
$$(1+x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}x^k\right).$$

Uvedený súčin má opäť tvar polynómu. Aký v ňom bude koeficient pri x^n?

Výraz x^n dostaneme práve vtedy, ak z prvej zátvorky vyberieme x^k a z druhej x^{n-k}. Pri nich sú koeficienty $\binom{n}{k}$ a $\binom{n}{n-k}$. Teda celkovo dostávame po sčítaní koeficient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Poznámka 6.3.3. V dôkaze sme využili fakt, že dva polynómy (resp. polynomické funkcie) sa rovnajú práve vtedy, keď majú rovnaké koeficienty.



Obr. 6.1: Cesta vyznačená na obrázku zodpovedá postupnosti 101001100

6.4 Geometrická interpretácia binomického čísla $\binom{n}{k}$

Na štvorčekovom papieri zvoľme dva priesečníky linajok, jeden označme symbolom S a druhý pomenujme A. Koľko je ciest z bodu S do bodu A, keď v mriežke cestujeme na východ = krok $(1, 0)$, alebo na sever = krok $(0, 1)$?

Riešenie. Každú cestu zakódujme postupnosťou 0 a 1, pričom 0 znamená krok doprava (na východ) a 1 krok nahor (na sever). Takto ceste z $S = (0, 0)$ do $A = (k, n)$ je priradená postupnosť pozostávajúca z k núl a n jednotiek. Uvedené priradenie je bijektívnym zobrazením z množiny všetkých uvažovaných ciest do množiny všetkých slov v $\{1, 0\}$ dĺžky $n + k$, s k nulami.

Počet ciest môžeme vyjadriť ako

- $\binom{n+k}{k}$ keď zvolíme zložky rovné 0;
- $\binom{n+k}{n}$ keď zvolíme zložky rovné 1.

Takto počet hľadaných ciest je

{06binom2:EQPOCETCIEST}
$$\binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}. \tag{6.11}$$

□

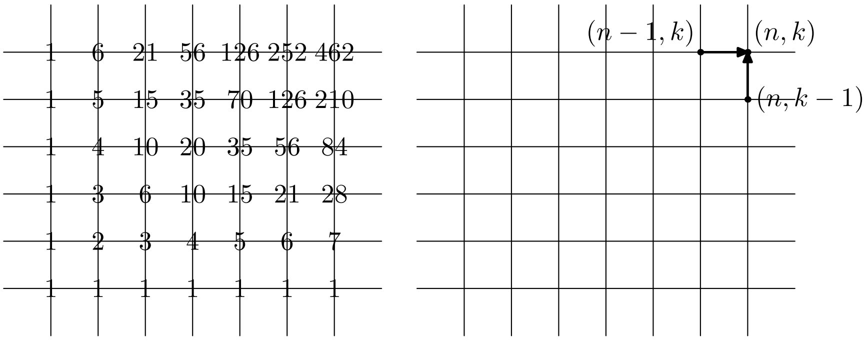
Na obrázkoch 6.2 môžeme vidieť súvis medzi cestovaním v mriežke a Pascalovým trojuholníkom. (Do bodu (n, k) sa môžeme dostať z bodov $(n-1, k)$ a $(n, k-1)$. Teda počet ciest z $(0, 0)$ do (n, k) sa dá získať ako súčet počtu ciest do $(n-1, k)$ a počtu ciest do $(n, k-1)$. Toto pozorovanie spolu s Pascalovou identitou (4.3) by sme mohli použiť na iný dôkaz toho, že (6.11) skutočne vyjadruje počet ciest v mriežke z $(0, 0)$ do (n, k). Alebo obrátene, ak už máme vzorec pre počet ciest, tak takouto úvahou z neho môžeme dostať Pascalovu identitu.)

Cestovanie v mriežke je ďalšia metóda, ktorou je možné dokázať pekné kombinatorické identity — úvahou, na rozdiel od aplikácie binomickej vety (algebraická metóda).

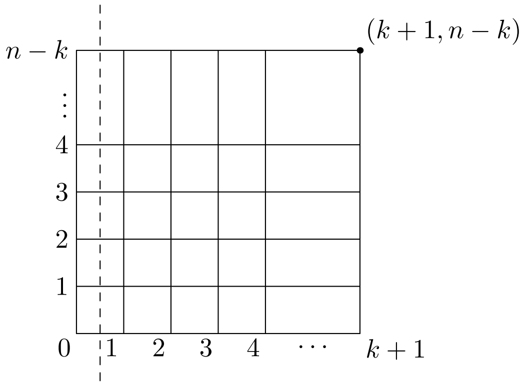
Príklad 6.4.1.

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Riešenie. Pravá strana vyjadruje počet ciest z $(0, 0)$ do $(k+1, n-k)$.



Obr. 6.2: Súvis mriežky a Pascalovho trojuholníka



Cesty rozdelíme podľa toho, ktorým z bodov

$$\begin{array}{cccc} (\frac{1}{2},0) & (\frac{1}{2},1) & \dots & (\frac{1}{2},n-k) \\ B_0 & B_1 & \dots & B_{n-k} \end{array}$$

prechádzajú.

$$\begin{aligned}
|\text{cesty cez } B_0| &= \binom{n-k+k}{k} = \binom{n}{k} \\
|\text{cesty cez } B_1| &= \binom{n-k-1+k}{k} = \binom{n-1}{k} \\
|\text{cesty cez } B_2| &= \binom{n-k-2+k}{k} = \binom{n-2}{k} \\
&\vdots \\
|\text{cesty cez } B_{n-k}| &= \binom{k}{k}
\end{aligned}$$

Aby sme videli, že počet ciest cez $B_j = (\frac{1}{2}, j)$ je skutočne rovný $\binom{n-j}{k}$ si stačí uvedomiť, že:

- Časť cesty z bodu $(0,0)$ do bodu $(0,j)$ je jednoznačne určená, jediná možnosť je ísť stále nahor.
- Potom musíme pokračovať doprava do bodu $(1,j)$.
- Zostáva nám zistiť počet ciest z $(1,j)$ do $(k+1,n-k)$. Ten je presne rovnaký ako počet ciest z $(0,0)$ do $(k,n-k-j)$, čo je presne

$$\binom{n-k-j+k}{k} = \binom{n-j}{k}.$$

□

Pomocou ciest v mriežke odvodíme aj identitu (6.8).

Príklad 6.4.2.

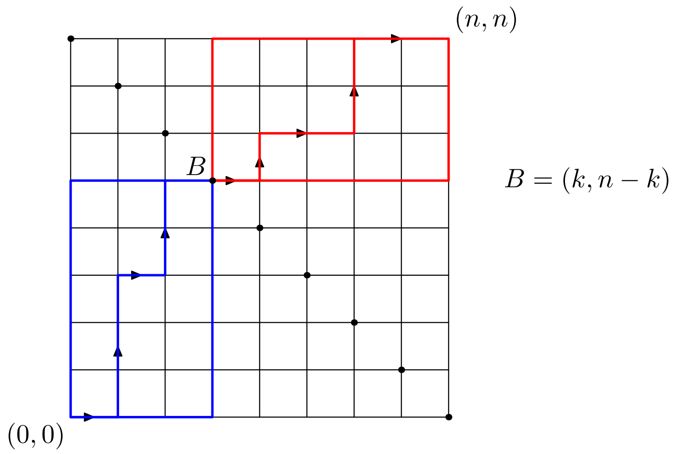
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Riešenie. Pravá strana predstavuje počet ciest z $(0,0)$ do (n,n).

Cesty rozdelíme podľa toho, ktorým z bodov

$$(0,n),(1,n-1),\dots,(k,n-k),\dots,(n,n)$$

prechádzajú. (Každá z nich prechádza presne jedným takýmto bodom.)



$$\begin{array}{ccccc} (0,0) & \rightarrow & (k,n-k) & \rightarrow & (n,n) \\ & \binom{n}{k}\text{ ciest} & & \binom{(n-k)+k}{k}\text{ ciest} & \end{array}$$

Počet ciest cez $(k,n-k)$ je rovný

$$\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k}$$

Záver: Počet ciest z $(0,0)$ do (n,n) sa dá vyjadriť ako

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

□

Príklad 6.4.3. Kombinatoricky ukážeme

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

Riešenie. Označme

- $\mathsf{P}(k, n-k) =$ množina všetkých ciest $(0,0) \to (k, n-k)$
- $\mathsf{P}(k+1, n-k-1) =$ množina všetkých ciest $(0,0) \to (k+1, n-k-1)$.

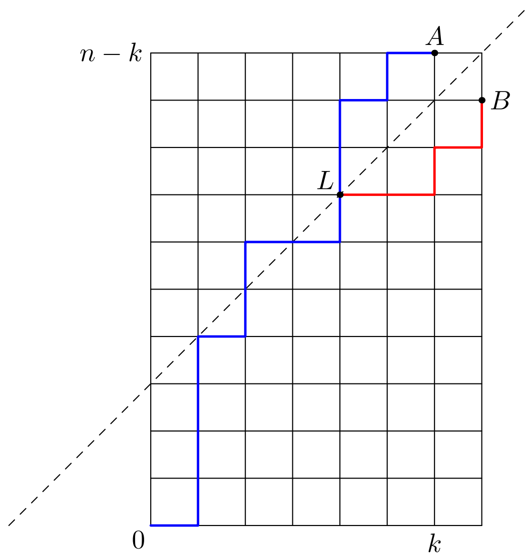
Platí

$$|\mathsf{P}(k, n-k)| = \binom{n}{k} \qquad \text{a} \qquad |\mathsf{P}(k+1, n-k-1)| = \binom{n}{k+1}.$$

Nájdeme injekciu

$$f\colon \mathsf{P}(k, n-k) \to \mathsf{P}(k+1, n-k-1)$$

pre prípad $k < \frac{n}{2}$.



Označme $A = (k, n-k)$, $B = (k+1, n-k-1)$.

- Nech q je os úsečky AB. Pretože $k < \frac{n}{2}$ (t.j. $k < n-k$), ľubovoľná cesta $P \in \mathsf{P}(k, n-k)$ aspoň raz pretína q.
- Označme L priesečník P a q najbližší ku A.
- Úsek P^* cesty P medzi L a A preklopíme cez q. Dostaneme cestu $L \to B$.
- Spojenie $P\colon (0,0) \to L$ a $P^*\colon L \to B$ dáva cestu $P'\colon (0,0) \to B$.

Takto sme priradili každej ceste z $\mathsf{P}(k, n-k)$ cestu z $\mathsf{P}(k+1, n-k-1)$.

Ukážeme, že *zobrazenie f je prosté.* Potrebujeme si rozmyslieť, že ak máme dve rôzne cesty z $(0,0)$ do A, tak ich preklopením vzniknú opäť rôzne cesty $f(P_1) \neq f(P_2)$ do B. (T.j. $P_1 \neq P_2 \Rightarrow f(P_1) \neq f(P_2)$.)

Označme si L_1 posledný priesečník P_1 s priamkou q. Pretože P_1 a P_2 sú rôzne, musia sa na niektorom mieste líšiť.

- Ak sa líšia v časti medzi počiatkom a L_1, tak na tom istom mieste sa líšia aj $f(P_1)$ a $f(P_2)$, lebo sme našli rozdiel už v časti, ktorá sa preklopením nezmení.
- Ak sa zhodujú v časti po L_1 a L_1 je súčasne aj posledný priesečník cesty P_2 s priamkou q, tak sa obe cesty preklápajú na tom istom mieste a teda rozdiel v úseku medzi L_1 a A sa po preklopení zmení na rozdiel častí ciest $f(P_1)$ a $f(P_2)$ od L_1 po B.

- Zostáva ešte možnosť, že P_2 sa pretne s q ešte v nejakom bode L_2, ktorý je ďalej ako L_1. Potom ale L_2 patrí do $f(P_2)$ ale nepatrí do $f(P_1)$ (lebo L_1 bol posledný priesečník P_1 a aj preklopenej cesty $f(P_1)$ s priamkou q). Teda $f(P_1)$ a $f(P_2)$ sa aj v tomto prípade líšia.

Dokázali sme teda, že pre $k < \frac{n}{2}$ platí

$$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}.$$

Aby sme videli, že táto nerovnosť je ostrá, stačí nám nájsť aspoň jednu cestu z $(0,0)$ do B, ktorá sa nedá dostať pomocou zobrazenia f. To platí pre ľubovoľnú cestu $(0,0) \to B$, ktorá sa nikde nedotkne priamky q. Môžeme zobrať napríklad cestu $(0,0) \to (k+1,0) \to B$.

Tento argument funguje iba vtedy, keď priamka q neprechádza bodom $(0,0)$. Stred úsečky AB je bod $(k+\frac{1}{2}, n-k-\frac{1}{2})$. Tento bod leží na diagonále ak $k+\frac{1}{2} = n-k-\frac{1}{2}$, t.j. $n = 2k+1$. Vidíme, že skutočne môžeme odvodiť ostrú nerovnosť, okrem prípadu $n = 2k+1$, čo je presne prípad, že

$$\binom{n}{k} = \binom{2k+1}{k} = \binom{2k+1}{k+1} = \binom{n}{k+1}.$$

Súčasne je to presne prípad, kedy nastane $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $k+1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ a

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

□

Príklad 6.4.4. Koľko je všetkých ciest v mriežke z bodu $(0,0)$ do bodu (n,n) s krokom $(1,0)$, $(0,1)$ takých, že žiadna sa nedostane nad diagonálu $x = y$.

Riešenie. Počet ciest $(0,0) \to (n,n)$ je $\binom{2n}{n}$. Rozdelíme ich na

- „zlé“ cesty – idú nad diagonálou (aspoň časť cesty je nad diagonálou);
- „dobré“ cesty – nejdú nad diagonálou.

$$\text{všetky cesty} = \text{dobré} \cup \text{zlé}$$
$$|\text{dobré cesty}| = |\text{všetky cesty}| - |\text{zlé cesty.}|$$

Koľko je zlých ciest?

Budeme postupovať ako v predchádzajúcom príklade, ale tentokrát budeme cesty preklápať cez os q úsečky danej bodmi $(0,0)$ a $(-1,1)$. (Teda q je priamka s bodmi $(0,1), (1,2), (2,3), \dots$)

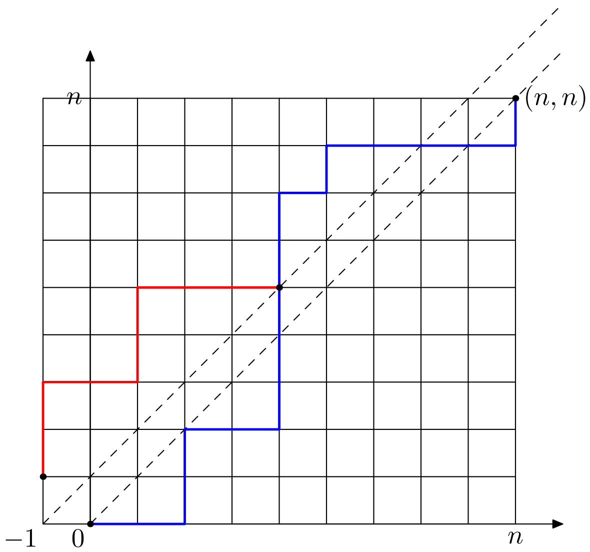
Každá cesta, ktorá ide nad diagonálu, sa musí priamky q dotknúť. Preklopíme cez q úsek $(0,0) \to L$ zlej cesty P, pričom L je prvý bod dotyku, zvyšok ponecháme nezmenený. Tým dostaneme cestu P' z $(-1,1)$ do (n,n).

Takto sme určili zobrazenie

$$f\colon \text{zlé cesty} \to \text{cesty z } (-1,1) \text{ do } (n,n).$$

Toto zobrazenie je prosté. (Dôkaz je analogický ako v predošlom príklade.)

Ukážeme, že zobrazenie f je surjektívne. Postupujme sporom, nech by sa našla cesta P' z $(-1,1)$ do (n,n), ktorá nie je obrazom zlej cesty (teda nevznikla preklopením zlej cesty). Cesta P' pretína os q, lebo lebo jej koncové body sú na rôznych stranách osi q. Preto vieme nájsť prvý bod dotyku L cesty P' s q a časť $(0,0) \to L$ preklopiť cez túto os. Takto získame cestu $(0,0) \to L$, ktorej obrazom je P' čo je spor s predpokladom.



Zistili sme, že zobrazenie f je bijektívne. To znamená, že počet zlých ciest je rovnaký ako počet ciest $(-1,1) \to (n,n)$, čo je $\binom{2n}{n-1}$.

Celkovo, počet ciest, ktoré sa nedostanú nad diagonálu je

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Pretože

$$\binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} \cdot \frac{n}{n+1},$$

môžeme výraz pre počet dobrých ciest upraviť na tvar

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

□

6.5 Multinomická veta

Binomická veta hovorí, aké sčítance dostaneme, keď roznásobíme niekoľko dvojčlenov tvaru $(a+b)$. Pozrime sa na situáciu, keď roznásobujeme trojčlen, napríklad v tvare $x_1 + x_2 + x_3$.

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3) &= x_1(x_1 + x_2 + x_3) + x_2(x_1 + x_2 + x_3) + x_3)(x_1 + x_2 + x_3) \\ &= x_1x_1 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 + x_3x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2\end{aligned}$$

Ted z každej zátvorky zvolíme jedného činiteľa a tieto vynásobíme, potom rovnaké sčítance spočítame.

Ak máme tri zátvorky, tak dostaneme

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)=$$
$$=x_1(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)+x_2(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)+x_3(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)=$$
$$=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1^2x_2+3x_1^2x_3+3x_2^2x_1+3x_2^2x_3+3x_3^2x_1+3x_3^2x_2+6x_1x_2x_3$$

Všimnime si napríklad sčítanec $3x_1^2x_2$. Tento sčítanec vznikol tak, že sme z dvoch zátvoriek vybrali x_1 a z jednej x_2.

1	2	3
x_1	x_1	x_2
x_1	x_2	x_1
x_2	x_1	x_1

Máme $\binom{3}{2}$ možností. (Počet možností, ako zvoliť dve zátvorky, z ktorých vyberáme x_1, tým je zátvorka, z ktorej vyberáme x_2, jednoznačne určená.)

Aký bude koeficient pri $x_1x_2x_3$? Máme $\binom{3}{1}$ možností pre výber zátvorky z ktorej vezmeme x_1, zo zvyšných dvoch zátvoriek si volíme jednu pre x_2, zostáva nám ešte jedna pre x_3.

$$\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}=3\cdot 2\cdot 1=6.$$

Tu sú vypísané všetky možnosti:

1	2	3
x_1	x_2	x_3
x_1	x_3	x_2
x_2	x_1	x_3
x_2	x_3	x_1
x_3	x_1	x_2
x_3	x_2	x_1

Veta 6.5.1 (Multinomická veta)**.** *Pre každé celé čísla $k,n\geq 0$, a reálne čísla $x_1,\dots,x_k$ platí*

{06binom2:EQMULTIN}
$$(x_1+\dots+x_k)^n=\sum\frac{n!}{a_1!a_2!\dots a_k!}x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}, \tag{6.12}$$

pričom sčitujeme cez všetky usporiadané k-tice nezáporných celých čísel $a_1,\dots,a_k$, ktorých súčet je

$$\sum_{i=1}^{k}a_i=n.$$

Označenie: Je zvykom označovať výraz $\frac{n!}{a_1!a_2!\dots a_k!}$ symbolom

$$\binom{n}{a_1,\dots,a_k},$$

nazýva sa *multinomický koeficient.*

Dôkaz.
$$(x_1+\dots+x_k)^n=\underbrace{(x_1+\dots+x_k)(x_1+\dots+x_k)\cdots(x_1+\dots+x_k)}_{n\text{-krát}}$$

Po roznásobení dostaneme sčítance tvaru $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}$, kde $a_1+\dots+a_k=n$, $a_i\geq 0$ pre všetky i.

Poďme spočítať aký je <u>počet</u> takýchto sčítancov pre pevne zvolenú n-ticu $(a_1,\dots,a_n)$:

- $\binom{n}{a_1}$ je počet možností pre výber prvého člena x_1 z a_1 zátvoriek.
- Pre každú z týchto možností máme $\binom{n-a_1}{a_2}$ možností pre voľbu a_2 zátvoriek, z ktorých vyberieme x_2. Celkovo máme
$$\binom{n}{a_1}\cdot\binom{n-a_1}{a_2}$$
možností pre výber a_1-krát x_1 a a_2-krát x_2.
- Pokračujeme vyberaním tretieho, ..., k-teho člena a prídeme k záveru, že počet sčítancov daného tvaru je

$$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\binom{n-a_1-a_2}{a_3}\cdots\binom{n-a_1-\dots-a_{k-1}}{a_k}=$$
$$=\frac{n!}{a_1!\cancel{(n-a_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-a_1)!}}{a_2!\cancel{(n-a_1-a_2)!}}\cdots\frac{\cancel{(n-a_1-\dots-a_{k-1})!}}{a_k!0!}=$$
$$=\frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_k!}$$

□

Binomická veta je špeciálny prípad multinomickej vety:

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_1^kx_2^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x_1^kx_2^{n-k}\\&=\sum_{\substack{(a_1,a_2)\\a_1+a_2=n\\a_1,a_2\geq 0}}\frac{n!}{a_1!a_2!}x_1^{a_1}x_2^{a_2}\end{aligned}$$

Vidíme, že multinomický koeficient je presne ten istý výraz, ktorý sme dostali v (5.10) ako vyjaderenie počtu slov s opakovaním.

Na základe súvisu so slovami vieme odvodiť takúto identitu pre multinomické koeficienty:

$$\binom{n}{a_1,\dots,a_k}=\binom{n-1}{a_1-1,a_2,\dots,a_k}+\binom{n-1}{a_1,a_2-1,a_3,\dots,a_k}+\dots+\binom{n-1}{a_1,\dots,a_{k-1},a_k-1} \tag{6.13}$$
{60binom2:EQMULTIPASCAL}

Stačí slová, ktoré počítame, rozdeliť do skupín podľa toho, ktoré písmeno zvolíme ako prvú zložku slova.

6.6 Cvičenia

V úlohách týkajúcich sa rôznych identít vyskúšajte, či ich viete odvodiť viacerými spôsobmi (indukciou, kombinatorickou úvahou, použitím iných faktov o binomických koeficientoch či binomickej vety).

Úloha 6.6.1. Ukážte, že pre ľubovoľné celé kladné číslo n platí

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n.$$

Úloha 6.6.2. Dokážte, že pre prirodzené čísla n, k také, že $1 \leq k \leq n$ platí

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}.$$

Úloha 6.6.3. Dokážte kombinatorickou úvahou a tiež pomocou binomickej vety:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Úloha 6.6.4. Dokážte binomickú vetu matematickou indukciou.

Úloha 6.6.5. Kombinatoricky dokážte: Pre celé čísla $n, x \geq 1$ platí

$$(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = x^n - 1.$$

Hint: dvomi spôsobmi určte počet takých slov dĺžky n v abecede $\{1,\ldots,x\}$ ktoré majú aspoň jednu zložku rôznu od x.

Úloha 6.6.6. Dokážte kombinatorickou úvahou a tiež pomocou binomickej vety:

m2cvic:EQCHUVANDERMONDE}

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j} \tag{6.14}$$

$(m, n \geq 0)$.[2] [3]

Úloha 6.6.7. Kombinatorickou úvahou dokážte:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

Potom dokážte:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m\binom{n}{m}.$$

Úloha 6.6.8. Nech n, m sú prirodzené čísla, $m \leq n$. Vyjadrite vzorcom bez použitia sumy:

a) $\sum\limits_{k=m}^{n}\binom{k}{m}\binom{n}{k}$

   Hint: všeobecný člen upravte na tvar $\binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{k}{m}\frac{1}{k}$

   Hint: všeobecný člen upravte na tvar $\frac{1}{m}\binom{k-1}{m-1}$.

Úloha 6.6.9. Uvažuje množinu slov v abecede $A = \{modr, erven, biela\}$ dĺžky n. Koľko slov má párny počet zložiek rovný červená? Ako by to dopadlo pre nepárny počet červených zložiek?

[2] Tejto rovnosti sa niekedy hovorí aj *Vandermondova identita.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Vandermonde's_identity`

[3] Môžete si všimnúť, že ako špeciálny prípad dostaneme (6.8). Môžete si vyskúšať aj dôkaz indukciou – opäť je to ukážka toho, že silnejšie tvrdenie (6.14) sa nám indukciou podarí dokázať, pri snahe dokázať (6.8) matematickou indukciou by sme mali problémy, pozri poznámku 3.2.3,

Úloha 6.6.10. Dokážte:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

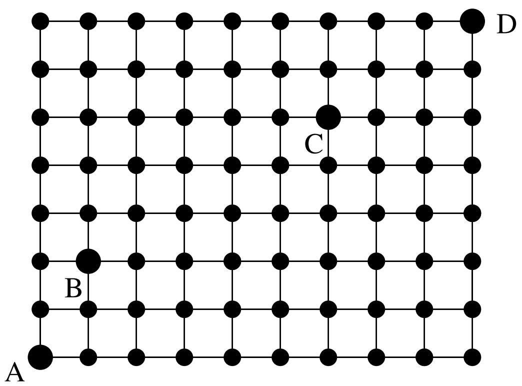
Úloha 6.6.11. Dokážte:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$,

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Úloha 6.6.12. Rovnosť $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ sme overili indukciou v úlohe 3.5.3. Vedeli by ste ju nejako odvodiť z „hokejkovej“ identity (6.6)? (Hint: Skúste vyjadriť k^2 pomocou $\binom{k}{2}$.)

Úloha 6.6.13. Na nasledujúcom obrázku je schematický plán mesta:



a) Koľko existuje rôznych ciest z vrchola A do vrchola $D = (9,7)$, ak cesta nesmie viesť zhora nadol ani sprava doľava?
b) Koľko z nich prechádza vrcholom $C = (6,5)$?
c) Koľko z nich neprechádza vrcholom $B = (1,2)$?
d) Všeobecne: Koľko je ciest z $(0,0)$ do (n,k) prechádzajúcich cez (i,j)?

Úloha 6.6.14. Pomocou cestovania v mriežke dokážte $\binom{a+b-1}{a} + \binom{a+b-1}{a-1} = \binom{a+b}{a}$ pre $a, b > 0$. (Môžete si všimnúť, že to je vlastne iný zápis Pascalovej identity.)

Úloha 6.6.15. Pomocou cestovania v mriežke dokážte

$$\sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k}\binom{a+b-s}{a-k} = \binom{a+b}{a},$$

pre $a \geq b$.

Hint: každá cesta prechádza cez presne jeden z bodov $(0,s), (1,s-1), \ldots, (s,0)$. [4]

[4] Môžete si všimnúť, že sme dostali vlastne iné odvodenie Vandermondovej identity (6.14).

Úloha 6.6.16. Pomocou cestovania v mriežke dokážte

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{s+k}{k} \binom{n-k}{m} = \binom{s+n+1}{s+m+1}$$

$(s, m, n > 1)$.

Hint: Pre $n < m$ tvrdenie platí. Nech teda $n \geq m$. Pravá strana vyjadruje počet ciest z $(0,0)$ do $(s+m+1, n-m)$. Pre $k = 0, 1, \ldots, n-m$ určte počet ciest ktoré prechádzajú bodom (s, k) a ďalej pokračujú do $(s+1, k)$.

Úloha 6.6.17. V mriežke cestujeme v smere na východ, na sever, a je povolený aj diagonálny krok z bodu (x, y) do $(x+1, y+1)$. Dokážte, že počet takýchto ciest z $(0,0)$ do (m, n) je rovný

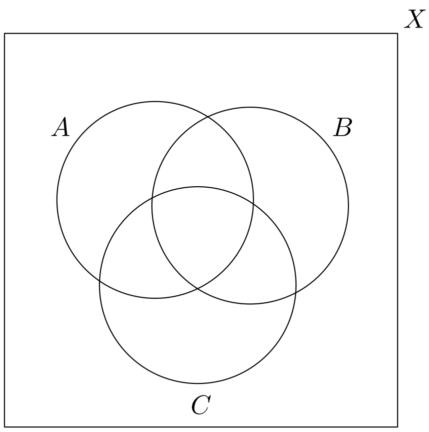
$$\sum_{k} \binom{m+n-k}{m} \binom{m}{k}.$$

Hint: cesty klasifikujte vzhľadom na počet diagonálnych krokov.

Kapitola 7

Princíp inklúzie a exklúzie

Uvažujme konečnú množinu X a podmnožiny A, B, C. Aká veľká je množina $A \cup B \cup C$?



Za prvé priblíženie vezmime číslo

$$|A| + |B| + |C|. \tag{7.1}$$ {07pie:EQABC}

Okrem prípadu keď A, B, C sú navzájom disjunktné množiny, je toto číslo väčšie, pretože prvky v $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ sme započítali viackrát (obrázok 7.1). Preto od (7.1) odpočítajme

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|. \tag{7.2}$$ {07pie:EQABACBC}

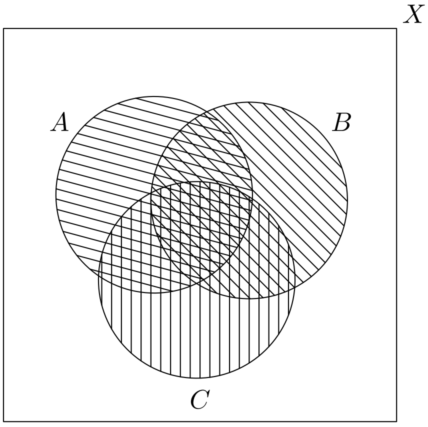
Teraz sme prvky v $A \cap B \cap C$ trikrát započítali v (7.1) a každý z nich sme trikrát odpočítali v (7.2) (obrázok 7.2). Preto

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

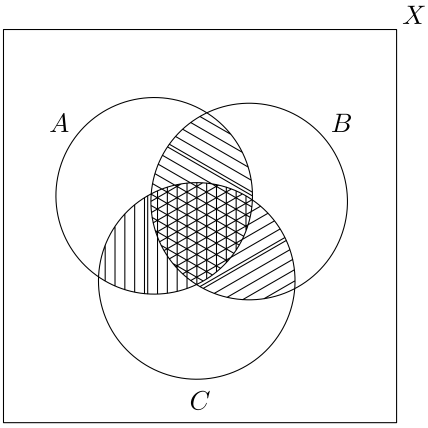
alebo ekvivalentne

$$|X \setminus (A \cup B \cup C)| = |X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Odvodíme analogickú formulu pre všeobecný prípad, povieme si kombinatorickú interpretáciu tejto formuly a podáme niekoľko aplikácií.



Obr. 7.1: Prvky, ktoré sme započítali viackrát



Obr. 7.2: Koľkokrát sme odpočítali jednotlivé prvky

7.1 Princíp inklúzie a exklúzie

Veta 7.1.1. *Nech X je konečná množina a $A_1, \dots, A_n$ sú podmnožiny X. Potom*

$$|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \dots$$
$$\dots + (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n| \quad (7.3)$$ {07pie:EQPIE}

Tu, podobne ako v prípade pre tri množiny, od X odčítame počty prvkov jednotlivých množín (každú môžeme chápať ako prienik systému pozostávajúceho z jedinej množiny) a striedavo pripočítavame a odpočítavame prieniky všetkých dvojíc, trojíc, štvoríc, atď.

Dôkaz (Počítaním). Ukážeme, že každý prvok $x \in X$ prispieva rovnakou hodnotou[1] do ľavej

[1]Inak povedané, na počty prvkov množín uvedených na oboch stranách rovnosti sa pozráme cez najjed-

strany (7.3) aj do pravej strany (7.3). Tým bude platnosť (7.3) overená.

Ak $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, tak x je v ľavej strane započítaný raz a v pravej strane tiež raz.

Nech $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Potom x patrí do presne $m \geq 1$ množín spomedzi $A_1, \ldots, A_n$. Prvok x prispieva do ľavej strany hodnotou 0. Do pravej strany prispieva x hodnotou

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^k \binom{m}{k} + \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} = (1-1)^m = 0.$$

Prvá rovnosť platí podľa binomickej vety. Druhá platí pretože $m > 0$ (pozri dôsledok 6.2.2). □

Akým spôsobom budeme aplikovať práve dokázaný výsledok?

Majme danú konečnú množinu X (základnú množinu) a množinu V vlastností $v_1, \ldots, v_n$. Pripúšťame prípad keď x má viac ako jednu vlastnosť. Položme

$$A_i = \{x \in X \colon x \text{ má vlastnosť } v_i\}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Potom $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ je množina tých prvkov z X, ktoré nemajú žiadnu vlastnosť z V a pomocou pravej strany v (7.3) môžeme určiť počet $|X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i|$ takých prvkov.

Táto interpretácia formuly (7.3) sa nazýva *princíp inklúzie a exklúzie* (alebo tiež *princíp zapojenia a vypojenia* či *princíp zahrnutia a vylúčenia*) a v tejto podobe budeme vetu 7.1.1 aplikovať.

7.2 Aplikácie

7.2.1 Riešenia $x_1 + \cdots + x_n = k$ s obmedzeniami

Príklad 7.2.1. Vo vrecku máme 1 modrú, 5 červených, 6 zelených a 20 žltých guličiek. Naberme hrsť desiatich guličiek. Koľko rôznych hrstí môžeme dostať?

Riešenie. Označme x_1, x_2, x_3, x_4 počet modrých, červených, zelených, žltých guličiek v hrsti. Pýtame sa na počet celočíselných riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \tag{7.4}$$ {07pie:EQHRST}

s ohraničeniami $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 5$, $0 \leq x_3 \leq 6$, $0 \leq x_4 \leq 10$.

Naša základná množina X = <u>všetky</u> nezáporné celočíselné riešenia rovnice (7.4). Z vety 5.2.2 vieme, že

$$|X| = \binom{10+3}{3}.$$

Od všetkých riešení odrátame počet „zlých“ riešení, teda takých, že $x_1 > 1$, alebo $x_2 > 5$, alebo $x_3 > 6$.

Tým máme definované vlastnosti v_1, v_2, v_3 a tak

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{množina riešení (7.4), kde } x_1 > 1, \\ A_2 &= \text{množina riešení (7.4), kde } x_2 > 5, \\ A_3 &= \text{množina riešení (7.4), kde } x_3 > 6. \end{aligned}$$

noduchšiu formu sčítacieho princípu $|M| = \sum_{x \in M} 1$ pozri (4.1).

- Čomu sa rovná $|A_1|$? Rovnica (7.4) prejde na tvar:

$$\begin{aligned}(x_1 - 2) + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 - 2\\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 8\\ y_i &\geq 0\end{aligned}$$

(Člen $x_1 - 2$ zodpovedá tomu, že sme si dve modré guličky vzali vopred.[2]) Počet takýchto riešení je $\binom{8+3}{3}$. Teda $|A_1| = \binom{8+3}{3}$.
Podobne $|A_2| = \binom{4+3}{3}$ a $|A_3| = \binom{3+3}{3}$.

- Analogicky môžeme postupovať pri výpočte $|A_1 \cap A_2|$.

$$\begin{aligned}(x_1 - 2) + (x_2 - 6) + x_3 + x_4 &= 10 - 2 - 6\\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 2\\ y_i &\geq 0\end{aligned}$$

Dostaneme $|A_1 \cap A_2| = \binom{2+3}{3}$.
Podobne $|A_1 \cap A_3| = \binom{1+3}{3}$. Tu je riešení dosť málo na to, aby sme ich vedeli aj všetky vypísať:

x_1	x_2	x_3	x_4
3	0	0	7
2	1	0	7
2	0	1	7
2	0	0	8

- Ostatné množiny sú prázdne, $|A_2 \cap A_3| = 0$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$.

Celkovo máme
$$\binom{13}{3} - \left[\binom{11}{3} + \binom{7}{3} + \binom{6}{3}\right] + \binom{4}{3} = 70.$$

□

Teraz vyriešime všeobecnejší prípad.

Príklad 7.2.2. Určte počet celočíselných, nezáporných riešení rovnice

{07pie:EQROVNICA}
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k,\ 0 \leq x_i < s, i = 1, \ldots, n. \tag{7.5}$$

Dôkaz. Z vety 5.2.2 vieme, že počet všetkých riešení rovnice (7.5) (bez horného ohraničenia!) je rovný
$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$
(počet prvkov základnej množiny X.)

Teraz určíme počet nevyhovujúcich riešení.

$$\begin{aligned}v_i &: \text{riešenie rovnice (7.5) s } x_i \geq s\\ A_i &= \text{množina všetkých riešení (7.5) kde } x_i \geq s\end{aligned}$$

Pri výpočte $|A_i|$ sa vlastne pozeráme na počet riešení

$$\begin{aligned}x_1 + \cdots + (x_i - s) + \cdots + x_n &= k - s\\ y_1 + \cdots + y_i + \cdots + y_n &= k - s\end{aligned}$$

[2]Podobnú úvahu sme už použili napríklad v príklade **??**.

pričom $y_i \geq 0$ pre $i = 1, \dots, n$.

Takto

$$|A_i| = \binom{n+k-s-1}{n-1}.$$

Ak hľadáme $|A_i \cap A_j|$, tak máme

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + (x_i - s) + \cdots + (x_j - s) + \cdots + x_n &= k - 2s \\ y_1 + \cdots + (y_i - s) + \cdots + y_n &= k - 2s \end{aligned}$$

pričom $y_i \geq 0$ pre $i = 1, \dots, n$. A teda

$$|A_i \cap A_j| = \binom{n+k-2s-1}{n-1}.$$

Všeobecne:

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = \binom{n+k-js-1}{n-1},$$

kde $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n$.

Celkovo, hľadaný počet riešení je rovný

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n+k-js-1}{n-1}.$$

□

Poznámka 7.2.3. Všimnime si, že aplikácia vzorca (7.3) v predošlom dôkaze sa zjednodušila tým, že sme tam mali sumy, kde bolo viacero rovnakých členov. Konkrétne v princípe zapojenia a vypojenia vystupuje suma veľkostí množín $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$. V našom prípade je to

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \binom{n+k-js-1}{n-1}.$$

Pretože každý sčítanec je rovnaký, súčet vypočítame ako počet sčítancov krát veľkosť jedného sčítanca. Počet sčítancov je počet možností výberu $i_1, \dots, i_k$ takých že $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n$, čo je presne počet j-prvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, je to teda $\binom{n}{j}$. Celkovo teda pre túto sumu dostaneme

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = \binom{n}{j} \binom{n+k-js-1}{n-1}.$$

Samozrejme, pri aplikovaní PIE je táto sume ešte vynásobená znamienkom, ktoré je určené ako $(-1)^j$.

Všimnime si, že pre $s = 1$ horné ohraničenie $x_i < s$, $i = 1, \dots, n$, dáva $x_1 = \cdots = x_n = 0$, a tak v tomto prípade počet riešení (7.5) je rovný 1 ak $k = 0$ a 0 ak $k > 0$. Tým dostávame peknú identitu

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n+k-j-1}{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{pre } k = 0, \\ 0 & \text{pre } k > 0. \end{cases}$$

7.2.2 Usadenie n párov do radu

Príklad 7.2.4. Koľkými spôsobmi sa môže n manželských párov usadiť v kine do jedného radu, keď požadujeme, aby žiadni dvaja manželia nesedeli vedľa seba? (Predpokladáme, že rad má $2n$ sedadiel.)

Riešenie. Základná množina X =všetky usadenia $2n$ ľudí do radu, t.j.

$$|X| = (2n)!$$

Teraz sa pozrieme na počet nevyhovujúcich usadení. Dvojice pomenujme: $1, 2, \ldots n$.
- v_i: i-ty manželský pár sedí vedľa seba, $i = 1, 2, \ldots, n$.
- A_i =všetky usadenia keď i-ty pár sedí vedľa seba.

Uvážme prípad, keď k dvojíc je takých, že každá dvojica sedí vedľa seba. Nech

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq 2n - 1,$$

sú čísla sedadiel obsadené jednou osobou z týchto k dvojíc. Potom sa a_i, a_{i+1} líšia aspoň o dva (miesto $a_i + 1$ je obsadené partnerom). Vieme, že takýchto postupností je[3]

$$\binom{2n-k}{k}.$$

Potom

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \binom{2n-k}{k} \cdot k! 2^k (2n-2k)! = 2^k \cdot (2n-k)!.$$

Uvedený výraz sme získali tak, že:
- $\binom{2n-k}{k}$ hovorí o výbere miest pre k manželských párov sediacich vedľa seba;
- $k!$ permutácií týchto párov;
- 2^k presadnutí dvojice;
- $(2n - 2k)!$ usadení zvyšných ľudí.

Celkovo:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^k (2n-k)!$$

je hľadaný počet usadení. □

7.2.3 Eulerova funkcia

Eulerova funkcia $\varphi(n)$ sa v teórii čísel definuje ako počet celých čísel medzi 1 až n, ktoré sú nesúdeliteľné s číslom n.

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{Z}; 1 \leq k \leq n, (k,n) = 1\}|.$$

Ukážeme, že

{07pie:EQEULER}
$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right), \tag{7.6}$$

[3]Uvedené nerovnosti po pridaní podmienky $a_i < a_{i+1} - 1$ sú ekvivalentné s

$$1 \leq a_1 < a_2 - 1 < \cdots < a_k - (k-1) \leq 2n - k,$$

čo znamená výber k prvkov z $\{1, 2, \ldots, 2n-k\}$.
Iný pohľad: Na chvíľu chápme vedľa seba sediaci pár ako jeden objekt - keďže tých nesmieme rozdeliť. Potom máme spolu $2n - k$ objektov a pýtame sa na výber miest pre konkrétnych k z nich.

kde $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla n.

S týmto vzorcom sa stretnete ešte na iných predmetoch, je možné, že uvidíte aj iné odvodenia ako pomocou princípu inklúzie a exklúzie. Pozri napríklad [Č].

Riešenie. Základná množina $X = \{1, 2, \dots, n\}$.

$$v_i\colon \text{číslo } m \in X \text{ je deliteľné prvočíslom } p_i$$
$$A_i = \{1 \le m \le n \colon p_i \mid m\}, i = 1, 2, \dots, n$$

Potom
$$\varphi(n) = n - |A_1 \cup \dots \cup A_k|.$$

Aplikujme PIE:

- Máme $A_i = \{p_i, 2p_i, 3p_i, \dots, \frac{n}{p_i} \cdot p_i\}$ teda
$$|A_i| = \frac{n}{p_i}$$
- Podobne $A_i \cap A_j = \{p_i p_j, 2p_i p_j, 3p_i p_j, \dots, \frac{n}{p_i p_j} \cdot p_i p_j\}$ a
$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}.$$
- Všeobecne množina $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ pozostáva z násobkov čísla $p_{i_1} \cdots p_{i_k}$ nepresahujúcich n a
$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}}$$

(Využívame fakt, že dve prvočísla p, q delia n práve vtedy, keď ich súčin pq delí n.)

Podľa princípu inklúzie a exklúzie dostávame

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} - \dots + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_s \le k} \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_s}} + \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \dots p_k} \\
&= n \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2}} - \dots + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_s \le k} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_s}} + \dots + (-1)^k \frac{1}{p_1 \dots p_k} \right) \\
&= n \left(1 - \sum_{i \in J_1} \frac{1}{p_i} + \sum_{\{i_1, i_2\} \in J_2} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2}} + \dots + \sum_{\{i_1, \dots, i_s\} \in J_s} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_s}} + \dots + (-1)^k \frac{1}{p_1 \dots p_k} \right) \\
&= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right).
\end{aligned}$$

Pri označení $J_s =$ všetky s-prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, k\}$ □

7.2.4 Permutácie bez pevného bodu

Príklad 7.2.5. Do klubu prišlo n hostí, každý z nich mal klobúk. Pri príchode každý z nich odložil klobúk do šatne, pri odchode dostal naspäť náhodne niektorý z klobúkov. Aká je pravdepodobnosť, že žiadny z nich nemá ten klobúk, v ktorom prišiel?

Ak chceme tento problém sformulovať trochu matematickejšie, tak sa nám hodín nasledujúci pojem:

Definícia 7.2.6. Permutáciu $a_1a_2\dots a_n$ množiny $\{1,2,\dots,n\}$ nazveme *permutáciou bez pevného bodu*, ak pre každé $i = 1,\dots,n$ platí $a_i \neq i$. Inými slovami, žiadny prvok sa nenachádza na svojej pozícii.

Podobným spôsobom by sme vedeli zadefinovať tento pojem aj pre ľubovoľnú n-prvkovú množinu, nie iba pre $\{1,2,\dots,n\}$.

V časti 5.3 sme hovorili o tom, že na permutácie množiny A sa dá pozerať aj ako na bijekcie $A \to A$. Pri tomto pohľade to, že permutácia

$$f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & k \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(i) & \dots & f(n) \end{smallmatrix}\right)$$

nemá pevný bod, znamená, že neexistuje prvok pre ktorý by platilo $f(i) = i$. To azda vysvetľuje prečo sa v názve tohoto pojmu hovorí o pevnom bode – nemáme taký bod, ktorý sa zobrazením f nemení.

Ak sa na permutácie pozeráme ako na bijekcie, tak pojem permutácie bez pevného bodu sa ešte priamočiarejšie zovšeobecní na ľubovoľnú koenčnú množinu.

V dvojriadkovom zápise permutácie nám táto vlastnosť hovorí, že sa tam nevyskytne číslo i zapísané v stĺpci i, t.j. nemáme tam dvakrát pod sebou zapísané to isté číslo. Napríklad

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$$

je permutácia bez pevného bodu ale

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & \underline{3} & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

má pevný bod, pretože v treťom stĺpci máme číslo tri, t.j. $a_3 = 3$.

Označme D_n počet permutácie n-prvkovej množiny bez pevného bodu. Vieme, že všetkých permutácií je n. Teda pravdepodobnosť, že náhodne vyberieme permutáciu bez pevného bodu je

$$p_n = \frac{D_n}{n!}.$$

Toto je vlastne pravdepodobnosť, ktorú chceme vyrátať v tejto úlohe.

Riešenie. Opäť využijeme princíp zapojenia a vypojenia. Základnou množinou X sú všetky permutácie množiny $\{1,2,\dots,n\}$. Vieme, že $|X| = n!$.

Chceme vyhodiť „zlé“ permutácie, t.j. také, že niektoré miesto sa nemení, čiže platí $a_i = i$.

$$|A_i| = \{\text{ permutácie množiny } \{1,2,\dots,n\} \text{ také, že } a_i = i\}$$

Vieme spočítať počet prvkov množiny $|A_i|$? Máme predpísané, že $a_i = i$, ale na ostatných miestach už môžeme prvky usporiadať ľubovoľne. Teda je to presne počet permutácií množiny $\{1,2,\dots,n\} \setminus \{i\}$, čiže

$$|A_i| = (n-1)!$$

Podobne ak sa zaujímame o množinu $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$, tak to znamená, že $a_{i_1} = i_1, a_{i_2} = i_2, \dots, a_{i_n} = i_n$, ale na ostatných miestach už môžeme prvky poukladať ľubovoľne. Teda počet prvkov tejto množiny je rovnaký ako počet permutácií $(n-k)$-prvkovej množiny $\{1,2,\dots,n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

Teraz už vlastne stačí aplikovať princíp zapojenia a vypojenia. Použitie rovnosti (7.3) sa nám zjednoduší tým, že v každej zo súm máme množiny s rovnakým počtom prvkov, čiže celá suma sa dá vyjadriť ako počet sčítancov – ktorý je $\binom{n}{k}$ – vynásobený hodnotou jednotlivých sčítancov – pozri poznámku 7.2.3. Dostaneme takto

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! + \dots + (-1)^n$$

Ak si všimneme, že $\binom{n}{k} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!}$, tak môžeme toto vyjadrenie upraviť ako

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

čiže

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \tag{7.7}$$

{07pie:EQDN}

$$p_n = \frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

□

Keď sa na analýze budete učiť o konvergencii radov, tak zistíte, že s rastúcim n sa hodnota p_n blíži k $\frac{1}{e}$, čo môžeme zapísať ako

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e}$$

alebo tiež

$$\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}$$
$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{1}{k!} + \dots$$

Presnejšie povedané, naučíte sa, že všeobecne platí

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$$

a vyššie uvedenú rovnosť dostaneme ako špeciálny prípad pre $x = -1$.

Môžete si tiež všimnúť, že pre $x = 1$ dostávame jedno z viacerých pomerne známych vyjadrení Eulerovho čísla

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots.$$

Skúsme ešte nájsť všetky permutácie bez pevného bodu aspoň pre malé hodnoty n. Výsledky môžete porovnať so vzťahu (7.7) a aj s rekurentným vyjadrením uvedeným v úlohe 7.3.9. (V tej istej úlohe nájdete aj iné odvodenie vyjadrenia pre D_n.)

Príklad 7.2.7. Môžeme sa pozrieť na to, koľko permutácií pre pevného bodu dostaneme pre malé n. Skúsime vypočítať D_n tak, že vypíšeme všetky permutácie bez pevného bodu.

Prípadom $n = 0$ sa ani veľmi zaoberať nemusíme. Ale ak si uvedomíme, že permutácia 0-prvkovej

množiny $\emptyset$ vlastne neobsahuje žiadne čísla, tak máme jedinú možnosť (prázdnu permutáciu) a je to permutácia bez pevného bodu, pretože pre každé $i \in \emptyset$ platí $a_i \neq i$. Lepšiu predstavu o tom, čo vlastne rátame, nám dajú asi prípady keď budeme robiť s neprázdnou množinou.

Pre $n = 1$ máme jedinú permutáciu $\binom{1}{1}$. Táto permutácia má pevný bod. To znamená, že $D_1 = 0$.

Pre $n = 2$ máme iba dve permutácie $\binom{1\,2}{1\,2}$ a $\binom{1\,2}{2\,1}$, očividne iba druhá z nich nemá pevný body, a zistili sme, že $D_2 = 1$.

Pozrime sa na prípad $n = 3$. Chceme teda nejakú permutáciu $\binom{1\ \ 2\ \ 3}{a_1\ a_2\ a_3}$, pričom vieme, že $a_1 \neq 1$. Ak $a_1 = 2$, tak na ďalšie dve miesta musíme dať iba jednotku alebo dvojku. Ale na druhom mieste nemôže byť dvojka, lebo by sme mali a_2. Teda už máme jedinú možnosť, ako túto permutáciu doplniť:

$$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}.$$

Podobne, ak si zvolíme $a_1 = 3$, tak ako jedinú možnosť dostaneme (podobnou úvahou)

$$\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}.$$

Pre $n = 3$ by nebol problém vypísať aj všetky permutácie, keďže ich je iba $3! = 6$, a pozrieť sa na to, ktoré z nich majú pevný bod a ktoré nie.

Vyskúšajme ešte $n = 4$. Opäť vieme, že $a_1 \neq 1$. Pozrime sa na to, aké možnosti máme ak $a_1 = 2$. Na niektorom z ostatných miest sa musí vyskytnúť jednotka. Rozdeľme jednotlivé prípady podľa toho, kde sa jednotka vyskytla.

- Ak položíme $a_2 = 1$, tak na zvyšné dve miesta musíme dať 3 a 4. Keďže žiadna z nich nesmie zostať na svojom mieste, musia sa navzájom vymeniť a dostaneme $a_3 = 4$, $a_4 = 3$.
- Podobne ak $a_3 = 1$, tak na zvyšné dve miesta máme dať 2 a 4. Ak nemá žiadne byť pevným bodom, tak opäť máme jedinú možnosť $a_2 = 4$, $a_4 = 2$.
- Ak $a_4 = 1$, tak na zostávajúcich dvoch miestach sa vymenia 2 a 3.

Dostali sme teda tieto tri možnosti:

$$\binom{1\,2\,3\,4}{2\,1\,4\,3}, \binom{1\,2\,3\,4}{2\,4\,1\,3}, \binom{1\,2\,3\,4}{2\,3\,4\,1}.$$

Nie je ťažké si uvedomiť, že situácia je úplne symetrická, takže možnosti v každom z prípadov $a_1 = 3$ a $a_1 = 4$ budú tiež tri. A ak ich chcete všetky vypísať, môžete postupovať podobnými úvahami.

$n = 2$	$\binom{1\,2}{2\,1}$
$n = 3$	$\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$
$n = 4$	$\binom{1\,2\,3\,4}{2\,1\,4\,3}\binom{1\,2\,3\,4}{2\,4\,1\,3}\binom{1\,2\,3\,4}{2\,3\,4\,1}$ $\binom{1\,2\,3\,4}{3\,1\,4\,2}\binom{1\,2\,3\,4}{3\,4\,1\,2}\binom{1\,2\,3\,4}{3\,4\,2\,1}$ $\binom{1\,2\,3\,4}{4\,1\,2\,3}\binom{1\,2\,3\,4}{4\,3\,1\,2}\binom{1\,2\,3\,4}{4\,3\,2\,1}$

n	D_n
0	1
1	0
2	1
3	2
4	9

Môžete sa predsvedčiť, že tieto hodnoty skutočne súhlasia s rovnosťou (7.7) aj s rekurentným vyjadrením (7.8).

7.3 Cvičenia

Úloha 7.3.1. Koľkými spôsobmi je možné usporiadať písmená M A T H I S F U N tak aby poradie ktoré dostaneme neobsahovalo žiadny z reťazcov MATH, IS a ani FUN?

Úloha 7.3.2. Koľko 5-písmenových slov sa dá zostaviť z písmen slova kolok, ak nesmú dve rovnaké písmená nasledovať bezprostredne za sebou.

Úloha 7.3.3. Určte počet prirodzených čísel $n, 1 \leq n \leq 10\,000$ ktoré nie sú deliteľné žiadnym z čísel 4, 5, 6.

Úloha 7.3.4. Určte počet celočíselných riešení rovnice $x_1+x_2+x_3+x_4 = 18$, ktoré vyhovujú podmienkam $1 \leq x_1 \leq 5, -2 \leq x_2 \leq 4, 0 \leq x_3 \leq 5, 3 \leq x_4 \leq 9$.

Úloha 7.3.5. Koľko je celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ takých, že $1 \leq x_1 \leq 6$, $2 \leq x_2 \leq 8$, $0 \leq x_3 \leq 8$, $5 \leq x_4 \leq 9$.

Úloha 7.3.6. Koľko je celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ ktoré spĺňajú $-12 \leq x_i \leq 20$ pre všetky i?

Úloha 7.3.7. Pri dôkaze PIE sme použili identitu

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} = 0 \ (n \geq 1).$$

Dokážte túto identitu pomocou PIE.

Úloha 7.3.8. Dvaja učitelia skúšajú súčasne skupinu 12 študentov, každý jeden predmet. Každý študent odpovedá z jedného predmetu 30 minút. Koľko existuje rozvrhov skúšania, ak požadujeme, aby skúšky skončili za šesť hodín?

Úloha 7.3.9. Nech D_n označuje počet permutácií množiny $\{1, \ldots, n\}$ bez pevného bodu.

a) Odvoďte rekurentný vzťah

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}), \quad n \geq 3, \tag{7.8}$$ {07piecvic:EQDNREKUR}

$D_1 = 0, D_2 = 1$.

b) Odvoďte platnosť $D_n = nD_{n-1}+(-1)^n, \quad n \geq 2$. Pomocou dokázaného vzťahu odvoďte formulu $D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})$.

Úloha 7.3.10. Koľkými spôsobmi je možné rozdeliť m rôznych guličiek do n rôznych krabičiek tak, aby v každej krabičke bola aspoň jedna gulička?

Úloha 7.3.11. Nech A, B sú konečné množiny, $|A| = m$ a $|B| = n$. Koľko je všetkých surjekcií z A do B.

Úloha 7.3.12. Koľko slov dĺžky 5 sa dá zostaviť z písmen a, b, c, ak každé písmeno sa musí vyskytnúť aspoň raz?

Literatúra

[A] Samuel Almássy. Dirichletov princíp, Ramseyova veta. Master's thesis, FMFI UK, Bratislava, 2007. In Slovak.

[AZ] M. Aigner a G. M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK.* Springer, Berlin, 4th edition, 2010.

[Bó] Miklós Bóna. *A walk through combinatorics. An introduction to enumeration and graph theory.* Word Scientific, New Jersey, 2nd edition, 2006.

[Br] Richard A. Brualdi. *Introductory Combinatorics.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 5th edition, 2010.

[Č] Juraj Činčura. Elementárna teória čísel. Poznámky k prednáške, `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/cvicenia/tc/`.

[G] R. Grimaldi. *Discrete and combinatorial mathematics.* Boston, Addison Wesely, 2004.

[GGK] A. M. Gleason, R. E. Greenwood, a L. M. Kelly. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition, Problems and Solutions 1938–1964.* The Mathematical Association of America, 19800.

[GKP] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, a Oren Patashnik. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, Massachusetts, 1989.

[HS] T. Hecht a Z. Sklenáriková. *Metódy riešenia matematických úloh.* SPN, Bratislava, 1992.

[Kn] Martin Knor. *Kombinatorika a Teória Grafov I.* Univerzita Komenského, Bratislava, 2000.

[Ko] Ladislav Kosmák. *Kombinatorická teória pravdepodobnosti.* Alfa, Bratislava, 1985.

[LPV] László Lovász, József Pelikán, a Katalin L. Vesztergombi. *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[MN] Jiří Matoušek a Jaroslav Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky.* Karolinum, Praha, 2002.

[MSE] Mathematics Stack Exchange. `http://math.stackexchange.com/`.

[R] Fred S. Roberts. *Applied Combinatorics.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1984.

[Vil1] N. Ja. Vilenkin. *Kombinatorika.* Nauka, Mosvka, 1969.

[Vil2] N. Ya. Vilenkin. *Combinatorics.* Academic Press, New York, 1971.

[WIK] Wikipedia. `http://en.wikipedia.org`.

[Z] Paul Zeitz. *The Art and Craft of Problem Solving.* John Wiley and Sons, 2nd edition, 2007.

Zoznam symbolov