

OBSAH

PŘEDMLUVA

I. Obecná pravidla kombinatoriky

Pověřiví cyklisté	13
Variace s opakováním	14
Číselné soustavy	15
Zámek s heslem	16
Morseův kód	16
Námořní semafor	17
Elektronický číslicový počítač	18
Genetický kód	18
Obecná pravidla kombinatoriky	19
Úloha o dominu	21
Posádka kosmické lodi	22
Šachovnicový problém	23
Kolik lidí neovládá cizí jazyky?	25
Princip inkluze a exkluze	26
V čem je chyba?	28
Eratostenovo síto	29

II. Variace, permutace a kombinace

Fotbalové mistrovství	31
Variace bez opakování	32
Vědecká společnost	32
Permutace	33
Úloha o věžích	34
Lingvistické problémy	35
Kolový tanec	36
Permutace s opakováním	37
Anagramy	38
Kombinace	40
Janovská loterie	42
Nákup zákusků	45
Kombinace s opakováním	46
Ještě jednou fotbalové mistrovství	47

V. Kombinatorika na šachovnici

Poutník prochází městem	108
Aritmetický čtverec	109
Figurální čísla	110
Aritmetický trojúhelník	111
Rozšířený aritmetický trojúhelník	113
Šachový král	114
Zobecněný aritmetický trojúhelník	115
Zobecněný aritmetický trojúhelník a číselná soustava o základu m ...	117
Některé vlastnosti čísel $C_m(k, n)$	117
Kostka v rohu	119
Aritmetický pětiúhelník	121
Geometrický způsob důkazů vlastností kombinací	122
Náhodné pohyby	125
Brownův pohyb	126
Panství zlé carevny	128
Absorpční vrstva	129
Putování po nekonečné rovině	130
Obecná úloha o věžích	131
Symetrická rozmístění	132
Dva koně	134

VI. Rekurentní vzorce

Fibonacciho čísla	138
Jiná metoda důkazu	140
Postupné rozklady	141
Násobení a dělení čísel	143
Úlohy o mnohoúhelnících	144
Nesnáze královského správce	146
Šťastné trolejbusové lístky	150
Rekurentní tabulky	151
Druhé řešení problému královského správce	152
Řešení rekurentních vzorců	154
Lineární rekurentní vzorce s konstantními koeficienty	155
Případ sobě rovných kořenů charakteristické rovnice	158
Aplikace teorie rekurentních vzorců na otázky přenosu informace	160
Třetí řešení problému královského správce	160

VII. Kombinatorika a řady

Dělení mnohočlenů	162
Algebraické zlomky a mocninné řady	163
Počítání s mocninnými řadami	167

Použití mocninných řad pro důkazy identit	169
Vytvořující funkce	170
Binomický vzorec	171
Polynomický vzorec	174
Newtonův vzorec	176
Výpočet druhých odmocnin	179
Vytvořující funkce a rekurentní vzorce	181
Rozklad na elementární zlomky	182
O jednom nelineárním rekurentním vzorci	185
Vytvořující funkce a rozklady čísel	187
Shrnutí výsledků o kombinatorice rozkladů	191
Úlohy z kombinatoriky	193
Odpovědi a řešení	235

Vlastnosti kombinací	49
Speciální případ principu inkluze a exkluze	54
Alternující součty kombinací	55

III. Kombinatorické úlohy s omezujícími podmínkami

Lvi a tygři	58
Stavba schodiště	58
Problém s knihami	60
Rytíři krále Artuše	60
Dívka spěchá na schůzku	61
Seance telepatie	64
Obecná úloha o přemísťování	66
Subfaktoriály	67
Karavana v poušti	69
Jízda na kolotoči	72
Fronta u pokladny	72
Úloha o dvojřadu	77
Další vlastnosti kombinací	77

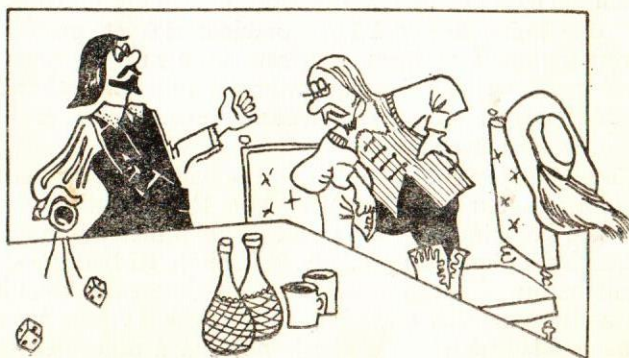
IV. Kombinatorika rozkladů

Domino	81
Rozmísťování do přihrádek	83
Kytice květin	83
Úloha o počtu dělitelů	84
Česání jablek	85
Houbaři	86
Zásilka fotografií	86
Praporky na stožárech	87
Úplný počet signálů	88
Různé statistiky	89
Rozklady čísel	90
Zásilka dopisu	90
Obecná úloha o nalepování známek	92
Kombinatorické úlohy teorie informace	93
Abiturientův problém	93
Placení nákupu	95
Nákup bonbónů	97
Jak rozměnit desetikopejku?	98
Rozklad čísel na sčítance	100
Metoda diagramů	101
Duální diagramy	102
Eulerova věta	104

PŘEDMLUVA

Představitelé nejrůznějších specializací potřebují mnohdy řešit úkoly, v nichž se zkoumají rozmanité kombinace sestavené z písmen, číslic a jiných objektů. Vedoucí dílny má rozdělit několik druhů práce obráběcím strojům, agronom musí umístit oševy zemědělských kultur na několik polí, zástupce ředitele školy sestavit rozvrh hodin, vědec-chemik prozkoumat možná spojení mezi molekulami a atomy, lingvista uvážít různé varianty významu písmen neznámého jazyka atd. Oblast matematiky, v níž se studují otázky, kolik různých kombinací, jež mají určité vlastnosti, je možné sestavit z daných objektů, se nazývá kombinatorika.

Kombinatorika vznikla v 16. století. V životě privilegovaných vrstev tehdejší společnosti zaujímaly značné místo hazardní hry. V kartách a kostkách se vyhrávaly a prohrávaly brilianty i zlato, paláce a statky, koně ušlechtilého chovu i drahé šperky. Velmi byly rozšířeny rozmanité loterie. Je pochopitelné, že zpočátku se kombinatorické úlohy týkaly především hazardních her — řešil se např. problém, kolika způsoby může při daném počtu vržených kostek padnout určitý počet ok, nebo problém, kolika způsoby lze získat dva krále v jisté karetní hře. Takovéto problémy hazardních her byly hybnou silou v rozvoji kombinatoriky i teorie pravděpodobnosti, která se rozvíjela souběžně s ní.



Obr. 1

Jedním z prvních, kdo začal počítat různé kombinace při hře v kostky, byl italský matematik Niccolo Tartaglia. Sestavil tabulku, v níž je uvedeno, kolika způsoby může padnout na r kostkách s ok. Nepřihlížel však k tomu, že jeden a týž součet ok lze získat různými způsoby (např. $1 + 3 + 4 = 4 + 2 + 2$).

Teoretické otázky kombinatoriky začali zkoumat v 17. století francouzští vědci Blaise Pascal a Pierre Fermat. Výchozím bodem jejich zkoumání byly opět problémy hazardních her. Zvláště velký význam zde měla úloha o rozdělení sázky, kterou Pascalovi předložil jeho přítel, vášnivý hráč, Chevalier de Méré. Šlo o tento problém: „Zápas“ hlava — orel se hraje do 6 vyhraných partií; byl však z nutných důvodů přerušen v době, kdy jeden z hráčů měl 5 vyhraných partií a druhý 4 vyhrané partie. Jak nyní rozdělit vsazené peníze? Bylo jasné, že rozdělení v poměru 5:4 by nebylo spravedlivé. Pascal použil metody kombinatoriky a řešil tento problém v obecném případě, kdy jednomu hráči zbývá ještě vyhrát r partií a druhému s partií. Jiné řešení této úlohy podal P. Fermat.

Další rozvoj kombinatoriky je spojen se jmény Jakob Bernoulli, G. W. Leibniz a Leonhard Euler. I u nich byly hlavními aplikace na různé hry (loto, pasíans atd.). V posledních letech se kombinatorika bouřlivě rozvíjí; plyne to z toho, že se všeobecně zvýšil zájem o problémy diskrétní matematiky. Kombinatorických metod se používá při řešení úloh s dopravní tematikou (např. při sestavování jízdních řádů), při vypracovávání plánů výroby a realizace produkce. Existuje řada spojení mezi kombinatorikou a úlohami lineárního programování, statistiky atd. Kombinatoriky se používá při sestavování a luštění šifer a pro řešení dalších problémů teorie informace.

Kombinatorické metody jsou významné i v čistě matematických otázkách — v teorii grup a jejich reprezentací, při zkoumání základů geometrie, v neasociativních algebrách atd.

V této knize se vypráví o kombinatorických problémech zajímavou a populární formou. Přesto se v ní však rozebírají i některé poměrně složité kombinatorické problémy. Čtenář se zde může např. seznámit s metodami rekurentních vzorců a s vytvářejícími funkcemi.

Kapitola I je věnována obecným pravidlům kombinatoriky — pravidlům součtu a součinu. V kapitole II se zkoumají variace, permutace a kombinace. Tento tradiční školní materiál je ilustrován některými zajímavými příklady. V kapitole III budeme studovat kombinatorické úlohy, v nichž se na zkoumané kombinace kladou určité omezující podmínky. V kapitole IV jsou uvedeny úlohy na rozklady čísel; dále se zde pojednává o geometrických

metodách v kombinatorice. Kapitola V je věnována úlohám o „náhodných blouděních“ a různým modifikacím aritmetického trojúhelníka. Kapitola VI pojednává o rekurentních vzorcích a kapitola VII o vytvářejících funkcích, speciálně o binomické větě.

Na závěr knihy je uvedeno několik set kombinatorických úloh, které autor vybral z různých pramenů. Mnoho úloh je převzato z knihy Whitworth, W. A.: *Choice and Chance*. London 1901; dále z knihy Riordan, J.: *Vvedeniye v kombinatornyy analiz*. Moskva, IL 1963, z publikace Jaglom, A. M.—Jaglom, I. M.: *Neelementarnyye zadachi v elementarnom izlozheniji*. Moskva, Gos-
techizdat 1954 a z různých sborníků úloh matematických olympiád atd.

Pověřiví cyklisté

„Opět osmička!“ vykřikl žalostně předseda klubu cyklistů a pohlížel nešťastně na prohnuté kolo svého bicyklu. „A proč to všechno? To proto, že při vstupu do klubu jsem dostal legitimaci s číslem 008. A teď neuběhne ani měsíc, aby se na jednom nebo druhém kole neobjevila osmička. Musím si vyměnit číslo legitimace. A abych nebyl podezříván z pověřivosti, provedu přeregistraci všech členů klubu a budu vydávat jenom legitimace s čísly, která neobsahují ani jednu osmičku.“



Obr. 2

Jak řekl, tak udělal — druhý den vyměnil všechny legitimace. Kolik členů bylo

registrováno v klubu, víme-li, že předseda použil všech trojčiferných čísel neobsahujících žádnou osmičku? (Např. 000 užil, 836 nikoliv.)

Určeme nejprve, kolik jednociferných čísel neobsahuje osmičku. Je jasné, že takových čísel je devět — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (číslo 8 vynecháváme). A nyní najdeme všechna dvojčiferná čísla neobsahující osmičky. Můžeme je sestavit takto: Vezmeme libovolné z dříve uvedených jednociferných čísel a napíšeme za ně jakoukoliv z devíti přípustných cifer. Takto získáme z každého jednociferného čísla devět dvojčiferných. Jednociferných čísel je též devět, a proto dostáváme celkem $9 \cdot 9 = 81$ dvojčiferných čísel bez osmiček. Jsou to tato čísla:

00,	01,	02,	03,	04,	05,	06,	07,	09,
10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	19,
20,	21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	29,
30,	31,	32,	33,	34,	35,	36,	37,	39,
40,	41,	42,	43,	44,	45,	46,	47,	49,
50,	51,	52,	53,	54,	55,	56,	57,	59,
60,	61,	62,	63,	64,	65,	66,	67,	69,
70,	71,	72,	73,	74,	75,	76,	77,	79,
90,	91,	92,	93,	94,	95,	96,	97,	99.

Existuje tedy $9^2 = 81$ dvojčiferných čísel bez cifry 8. Za každé z nich můžeme opět umístit libovolnou z devíti přípustných cifer. Získáme tak $9^2 \cdot 9 = 9^3 = 729$ trojčiferných čísel. To znamená, že v klubu je registrováno 729 členů. Obdobně bychom zjistili, že čtyřčiferných čísel, která neobsahují osmičky, je právě $9^4 = 6\,561$.

V jiném klubu byli cyklisté ještě pověřivější. Protože číslo 0 je podobné protaženému kolu, odmítli i tuto cifru a při registraci použili jen čísel s ciframi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. *Kolik členů má klub, je-li známo, že pro legitimace bylo užito všech trojčiferných čísel, která neobsahují žádnou z cifer 0, 8?*

Tento úkol je obdobný předchozímu, pouze místo devíti číslic je zde přípustných jen osm. Stačí tedy zaměnit číslo 9 číslem 8 a úkol je vyřešen. Klub má $8^3 = 512$ členů.

Variace s opakováním

Problém o cyklistech se váže k tomuto typu úloh: Jsou dány předměty n různých druhů. Z nich sestavujeme všechny možné skupiny o k předmětech, tzv. k -skupiny. Přitom se v těchto skupinách mohou předměty téhož druhu vyskytovat i vícekrát. Dvě skupiny budeme považovat za různé, liší-li se v počtu předmětů některého druhu nebo v pořadí předmětů.

Skupiny popsaného typu budeme nazývat k -variace s opakováním z prvků n druhů, jejich počet budeme označovat $\bar{A}_n^k$. V první úloze o cyklistech byl počet druhů prvků roven 9 (vybírali jsme všechny cifry kromě osmičky) a každá variace (každé číslo) obsahovala tři prvky. V tomto konkrétním případě jsme zjistili, že počet variací $\bar{A}_9^3 = 9^3$. Představme si, že nyní máme k dispozici n druhů předmětů a vybíráme z nich k -variace s opakováním. Je nasnadě domněnka, že počet těchto variací bude roven n^k .

Chceme tedy dokázat, že počet k -variací s opakováním z prvků n druhů

$$\bar{A}_n^k = n^k. \quad (1)$$

Důkaz provedeme pomocí matematické indukce podle k , tj. podle počtu prvků ve variaci při pevné hodnotě n .

Pro $k = 1$ je odpověď zřejmá; každá variace s opakováním má pouze jediný prvek a různé variace dostaneme tak, že vybíráme postupně prvky jednotlivých druhů. Počet druhů je n , a tedy i počet variací je n . Odtud plyne, že $\bar{A}_n^1 = n$, což je v souladu se vzorcem (1).

Předpokládejme nyní, že platí $\bar{A}_n^{k-1} = n^{k-1}$, a uvažme k -variace s opakováním. Všechny takovéto variace získáme

tímto způsobem: Vybereme libovolnou $(k-1)$ -variaci s opakováním $(a_1, \dots, a_{k-1})$ a připíšeme k ní prvek a_k jednoho z daných druhů. Dostaneme tak jistou k -variaci $(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$. Přitom je zřejmé, že z každé $(k-1)$ -variace získáme tolik k -variací, kolik je různých druhů prvků, tedy n variací. Na první pohled je patrné, že při tomto postupu žádnou k -variaci nevynecháme a ani jednu nedostaneme dvakrát [je-li $(a_1, \dots, a_{k-1}) \neq (b_1, \dots, b_{k-1})$ nebo $a_k \neq b_k$, pak je i $(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k) \neq (b_1, \dots, b_{k-1}, b_k)$]. Proto je počet k -variací s opakováním z prvků n druhů n -krát větší než počet $(k-1)$ -variací s opakováním z prvků týchž druhů. Odtud plyne, že $\bar{A}_n^k = n \bar{A}_n^{k-1}$. Podle našeho předpokladu je $\bar{A}_n^{k-1} = n^{k-1}$. Odtud dostáváme

$$\bar{A}_n^k = n \cdot n^{k-1} = n^k.$$

Tím je vzorec (1) dokázán pro všechny hodnoty k .

S formulí (1) se setkáváme při řešení řady problémů. Povězme si nyní o některých z nich.

Číselné soustavy

Kromě desítkové číselné soustavy se používá i jiných — dvojkové, trojkové, osmičkové atd. V číselné soustavě o základu n se používá n číslic. Vypočítejme, *kolik existuje v číselné soustavě o základu n přirozených čísel, zapsaných právě k znaky*.*

Jestliže připustíme zápisy, které začínají nulou, pak každé k -ciferné číslo v soustavě o základu n můžeme chápat jako variaci s opakováním, sestavenou z k číslic, přičemž jsou k dispozici číslice n druhů. Ze vzorce (1) dostáváme, že počet takových čísel je n^k .

Pro přirozená čísla se však nepoužívá zápisů, které začínají nulou. Proto od získaného čísla n^k musíme odečíst počet čísel, jejichž zápis v soustavě o základu n začíná nulou. Jestliže „vyškrtneme“ v každém z takovýchto čísel první číslici — nulu —, dostaneme $(k-1)$ -ciferné číslo (které též může začínat nulou). Celkový počet těchto $(k-1)$ -ciferných čísel podle vzorce (1) n^{k-1} . To znamená, že existuje celkem

$$n^k - n^{k-1} = n^{k-1} \cdot (n-1)$$

k -ciferných čísel v soustavě o základu n .

* Pro pohodlí počítejme 0 mezi přirozená čísla.

Např. v desítkové číselné soustavě existuje $10^3 \cdot 9 = 9\,000$ čtyřciferných čísel — z 10 000 čísel od 0 do 9 999 je třeba „zavrhnout“ tisíc čísel, a to čísla od 0 do 999.

Vzorec, ke kterému jsme zde dospěli, můžeme odvodit i jiným způsobem. V k -ciferném čísle, zapsaném v soustavě o základu n , může být na prvním místě libovolná z cifer 1, 2, ..., $n-1$, na druhém a dalších místech kterákoli z cifer 0, 1, 2, ..., $n-1$. Na první místo tedy kandiduje $n-1$ cifer, na každé ze zbývajících míst je n kandidátů. Odtud již lehce dospíváme k tomu, že hledaných čísel je $(n-1)n^{k-1}$.

Zámek s heslem

Pro ochranu sejfů a automatických úschoven se používá zámeků s heslem, které je možno otevřít jenom tehdy, když se jim „poví“ určité „tajné slovo“. Toto slovo se sdělí pomocí jednoho nebo několika kotoučů, na nichž jsou vyražena písmena (nebo číslice).

Necht je na kotouči 12 písmen a tajné slovo se skládá z 5 písmen. Kolik nezdařených pokusů může provést ten, kdo toto tajné slovo nezná?

Podle vzorce (1) existuje celkem $12^5 = 248\,832$ možných tajných slov. To znamená, že počet nezdařených pokusů může být nejvýše 248 831. Sejfy jsou ovšem obvykle konstruovány tak, že po prvním nezdařeném pokusu je otevřít se zapojí poplašné zařízení.

Morseův kód

Při telegrafickém přenosu zpráv se používá Morseových značek. Všechna písmena, číslice, dělicí a jiná znaménka jsou zde zakódována jistými skupinami teček a čárek. Např. e ., ch — — — —, 8 — — — — ., ! — — . . — — atd.

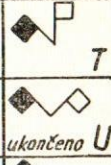
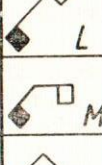
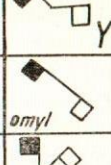
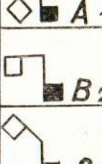
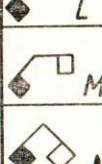
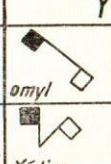
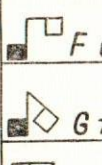
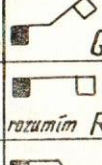
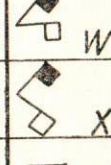
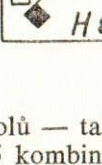
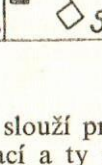
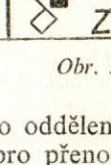
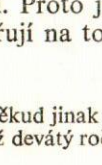
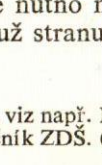
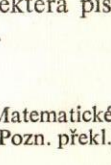
Nevystačili bychom při vytváření kódu z teček a čárek se skupinami o menším počtu znaků? Nemohli bychom předávat všechny zprávy pomocí skupin teček a čárek, jež by byly nejvýše čtyřznakové? Zkusme nejprve spočítat, zda s nejvýše čtyřznakovými symboly vystačíme na zakódování všech písmen. Odpověď nám dá vzorec pro počet variací s opakováním. Ze vzorce (1) plyne, že $A_2^1 = 2$. To znamená, že pomocí jednoho znaku (tečky nebo čárky) je možno zakódovat dvě písmena. Užitím dvou znaků můžeme zakódovat $2^2 = 4$ písmena, pomocí tří znaků $2^3 = 8$ písmen a užitím čtyř znaků $2^4 = 16$ písmen. Nejvýše čtyřznakové symboly můžeme

tedy zakódovat $2+4+8+16$, tj. 30 písmen. V české abecedě je 27 písmen čili našich 30 symbolů, které máme k dispozici, plně postačuje. Tři „volné“ nejvýše čtyřznakové symboly však nestačí k zakódování všech číslic a ostatních potřebných znamének. Kdybychom vzali v úvahu i pětiznakové symboly — těch lze vytvořit 32 — pak už 62 získaných skupin nejvýše pětiznakových zcela postačuje k telegrafickému přenosu zpráv.*

Námořní semafor

Na lodích se mnohdy užívá vizuálního signalizačního systému zvaného semafor. Každé písmeno je zde reprezentováno určitou polohou dvou praporků. Zpravidla jsou praporky na opačných stranách těla signalizujícího. Při vysílání několika písmen (h, i, o, w, x, z) jsou oba praporky na téže straně. Proč je nutná tato výjimka? Odpověď na tuto otázku dá opět vzorec pro počet variací s opakováním. Každý praporek může být v jedné z pěti možných různých poloh — v poloze svisle dolů, šikmo dolů, vodorovně, šikmo vzhůru a svisle vzhůru. Máme k dispozici dva praporky, a proto celkový počet kombinací „základních poloh“ je $A_5^2 = 5^2 = 25$. Přitom ještě ne-

lze brát v úvahu např. polohu, kdy oba praporky směřují svisle dolů — ta slouží pro oddělení slov. Získáváme tedy méně než 25 kombinací a ty pro přenos všech písmen české abecedy nestačí. Proto je nutno některá písmena zakódovat praporky, jež směřují na touž stranu.

	 I 9	 T
	 K 0	 U
 A 1	 L	 Y
 B 2	 M	 omyl
 C 3	 N	 číslice
 D 4	 O	 písmena
 E 5	 P	 V
 F 6	 Q	 W
G 7	rozumím R	X
H 8	S	Z

Obr. 3

* Morseův kód je konstruován poněkud jinak; viz např. Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro sedmý až devátý ročník ZDŠ. (Pozn. překl.)

Elektronický číslicový počítač

Elektronické počítače mohou řešit nejrozmanitější úkoly. Na jednom a též počítači je možno luštit nápisy v neznámých jazycích, provádět výpočty pro stavbu přehrad, zpracovávat získané údaje o pohybu rakety. Čím objasníme takovou pružnost v užití počítače? Především tím, že všechny tyto úkoly se převádějí na práci s čísly. Ale jak to, že stroj je schopen řešit tolik úloh; vždyť číselné údaje, které dostává, jsou velmi různorodé. Kolik různých kombinací čísel je možno vůbec vložit do stroje?

Podívejme se blíže např. na počítač Strela. Operační paměť tohoto stroje má 2 048 buněk, v každé z nich je 43 dvojkových bitů. Každý bit může obsahovat buď 0, nebo 1. Máme tedy celkem $43 \cdot 2\,048$, tj. více než 87 000 různých míst, přičemž každé místo může být „zaplněno“ nulou nebo jedničkou. Podle vzorce (1) dostáváme, že stroj Strela může být ve více než $2^{87\,000}$ různých stavech. Je těžké si vůbec představit, jak obrovské je toto číslo. Uvedme aspoň toto srovnání: Počet neutronů, které by byly těsně „napěchovány“ do koule o poloměru, jenž je roven vzdálenosti „Země — dosud nejvzdálenější objevená mlhovina“, není větší než 2^{500} .

Vezměme jenom jednu jedinou buňku paměti. Stotisícová armáda písařek by potřebovala devět let k tomu, aby napsala všechna čísla, která se mohou v této buňce objevit. (Počítáme, že písařky pracují 7 hodin denně a k zápisu jednoho 43 ciferného čísla je třeba 10 sekund.)

Genetický kód

Pozoruhodným objevem 20. století bylo rozluštění genetického kódu. Podařilo se objasnit, jakým způsobem se dědičná informace předává potomstvu. Ukázalo se, že tato informace je zapsána v gigantických molekulách deoxyribonukleové kyseliny (DNK). Různé molekuly DNK se vzájemně liší tím, v jakém pořadí v nich následují čtyři dusíkaté zásady: adenin, tymin, guanin, cytozín. Tyto zásady určují řád výstavby bílkovin organismu ze dvou desítek aminokyselin, přičemž každá aminokyselina je zašifrována kódem z tří dusíkatých zásad.

Je snadno pochopitelné, odkud se vzalo číslo 3. S užitím kombinací dvou zásad je možno pouze zašifrovat 4^2 , tj. 16 aminokyselin, a to nestačí. Vezmeme-li tři zásady, dostaneme 4^3 čili 64 skupin. A tento počet je už zcela postačující k zašifrování dvou desítek kyselin. Bylo by jistě velmi zajímavé dovědět se,

jak se v přírodě využívá nadbytku informace — počet možných skupin je 64 a počet aminokyselin více než třikrát menší.

V jednom chromozómu je obsaženo několik desítek miliónů dusíkatých zásad. Počet různých skupin, které z nich lze sestavit, je nepředstavitelně velký.* Nepatrná část těchto kombinací by stačila k tomu, aby zabezpečila celou mnohotvárnost živé přírody za období existence života na Zemi. Uvědomme si ale, že pouze nepatrná část teoreticky možných kombinací vede k životaschopným organismům.

Obecná pravidla kombinatoriky

Jak uvidíme dále, kombinatorické úlohy bývají velmi rozmanitých typů. Ale většinu z nich lze řešit pomocí dvou základních pravidel — užitím pravidla součtu a pravidla součinu.

Často se nám podaří rozdělit zkoumané skupiny do několika tříd, přičemž každá skupina patří právě do jedné třídy. Je zřejmé, že pak je celkový počet skupin roven součtu počtů skupin ve všech třídách. Toto tvrzení nazýváme *pravidlem součtu*. Někdy bývá formulováno též takto:

Jestliže nějaký objekt A můžeme vybrat m způsoby a jiný objekt B lze vybrat n způsoby, potom výběr „buď A , nebo B “ je možno provést $m+n$ způsoby.

Při použití pravidla součtu vyjádřeného poslední formulací je třeba dávat pozor na to, aby ani jeden ze způsobů výběru objektu A nebyl shodný s některým způsobem výběru objektu B (v první formulaci to odpovídá požadavku, aby ani jedna z uvažovaných skupin nepatřila do dvou nebo více tříd). Jestliže takové shodné způsoby výběru A a B existují, pak pravidlo součtu neplatí — dostáváme v tom případě pouze $m+n-k$ různých způsobů výběru, kde k je počet shodných způsobů výběru příslušných objektů.

Druhé pravidlo, nazývané *pravidlo součinu*, je poněkud složitější. Při sestavování skupin o dvou prvcích je často známo, kolika způsoby můžeme vybrat první prvek a kolika způsoby prvek druhý, přitom počet způsobů výběru druhého prvku nezávisí na tom, jak byl vybrán první prvek. Nechť první prvek je

* Je roven 4^N , kde N je počet zásad v chromozómu; viz vzorec (1).

možno vybrat m způsoby a druhý prvek n způsoby. Pak dvojici těchto prvků lze vybrat mn způsoby. Jinak řečeno:

Jestliže objekt A můžeme vybrat m způsoby a jestliže po každém takovém výběru lze objekt B vybrat n způsoby, pak výběr dvojice (A, B) v tomto pořadí je možno uskutečnit mn způsoby.

Důkaz pravidla součinu je velmi jednoduchý. Stačí si pouze uvědomit, že každý z m způsobů výběru objektu A můžeme zkombinovat s n způsoby výběru objektu B . A to nás vede k mn způsobům výběru dvojice (A, B) .

Pravidlo součinu názorně ilustruje tato tabulka:

Tabulka 1

$(A_1, B_{11}), \dots, (A_1, B_{1n}),$
$(A_2, B_{21}), \dots, (A_2, B_{2n}),$
.....
$(A_i, B_{i1}), \dots, (A_i, B_{in}),$
.....
$(A_m, B_{m1}), \dots, (A_m, B_{mn}).$

V této tabulce $A_1, \dots, A_m$ označují m způsobů výběru objektu A ; $B_{11}, \dots, B_{in}$ označují n způsobů výběru objektu B za předpokladu, že objekt A byl vybrán i -tým způsobem. Je zřejmé, že tabulka obsahuje všechny způsoby výběru dvojice (A, B) a skládá se z mn prvků.

Jestliže způsoby výběru objektu B nezávisí na tom, jak byl vybrán objekt A , pak místo uvedené tabulky dostaneme tabulku jednodušší:

Tabulka 2

$(A_1, B_1), (A_1, B_2), \dots, (A_1, B_n),$
$(A_2, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_2, B_n),$
.....
$(A_m, B_1), (A_m, B_2), \dots, (A_m, B_n).$

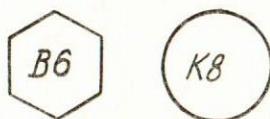
Může se ovšem stát, že je třeba sestavit nikoliv dvojice, ale skupiny o větším počtu prvků. Pak dospíváme k této úloze:

Kolik lze sestavit k -skupin za těchto předpokladů: První prvek může být vybrán z n_1 různých druhů, druhý prvek z n_2 různých druhů, ..., k -tý prvek z n_k druhů. Dvě skupiny přitom považujeme za různé, když v nich aspoň na jednom místě jsou prvky různých druhů.

Tuto úlohu můžeme řešit stejným způsobem jako úlohu o cyklistech. První prvek lze vybrat n_1 způsoby. Každý z vybraných prvků můžeme nyní spojit s libovolným prvkem, který patří některému z n_2 druhů; dostaneme tak $n_1 n_2$ dvojic. Každou dvojici můžeme spojit s libovolným prvkem vybíraným z n_3 druhů; dostaneme $n_1 n_2 n_3$ trojic. Pokračujeme-li takto dále, dospíváme nakonec k $n_1 n_2 \dots n_k$ skupinám uvažovaného typu.

V úloze o cyklistech jsme vybírali tři prvky (číslíci stovek, číslíci desítek a číslíci jednotek). Při každém kroku jsme mohli vybrat jednu z devíti přípustných číslíci. Proto jsme dostali $9 \cdot 9 \cdot 9$, tj. 729 čísel. A nyní řešíme obtížnější úkol.

Vytvářejme trojznakové symboly složené z geometrických obrazců (kružnice, čtverce, trojúhelníka nebo šestiúhelníka), písmen



Obr. 4

(máme jich k dispozici 27) a číslíci. Kolik takových trojčlenných skupin můžeme sestavit?

V prvním kroku vybereme geometrický obrazec. Tento výběr můžeme provést čtyřmi způsoby (máme k dispozici čtyři obrazce). Potom je třeba vybrat jedno z 27 písmen a jednu z 10 číslíci. Celkem dostaneme $4 \cdot 27 \cdot 10$, tj. 1 080 trojčlenných skupin.

Úloha o dominu

Obtížněji se řeší takové kombinatorické úlohy, v nichž počet výběrů při každém kroku závisí na tom, jaké prvky byly vybrány v předcházejících krocích. Uveďme příklad takové úlohy:

Kolika způsoby můžeme vybrat z 28 kostek domina dvě kostky tak, abychom je mohli přiložit k sobě (tj. aby se nějaký počet bodů vyskytoval zároveň na obou kostkách)?

Nejprve vybereme jednu kostku. To můžeme provést 28 způsoby. Přitom v 7 případech půjde o „dublet“, tj. o kostku jednoho z typů 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66; v 21 případech dostaneme kostku s různými počty bodů, např. 05, 13 atd. V prvním případě můžeme druhou kostku vybrat 6 způsoby (je-li např. v prvním kroku vybrána kostka 11, můžeme v druhém kroku vzít jednu z kostek 01, 12, 13, 14, 15, 16). V druhém případě lze druhou kostku vybrat 12 způsoby (v případě výběru kostky 35 se hodí kostky 03, 13, 23, 33, 34, 36, 05, 15, 25, 45, 55, 56). Podle pravidla

součinu dostáváme v prvním případě $7 \cdot 6 = 42$ způsobů výběru a v druhém $21 \cdot 12 = 252$ možných výběrů. Podle pravidla součtu dospíváme k $42 + 252$, tj. 294 způsobům výběru dvojice kostek.

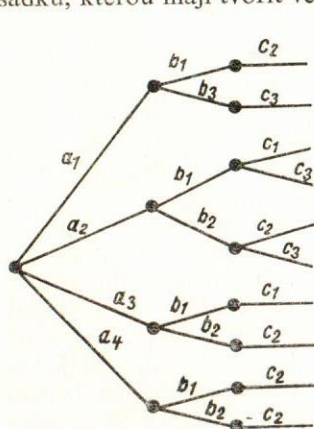
V provedené úvaze jsme přihlíželi i k pořadí, ve kterém byly kostky vybírány. Proto se každá dvojice kostek objevuje dvakrát (např. poprvé 01 a 16, podruhé 16 a 01). Jestliže na pořadí výběru kostek záležet nebude, dostaneme dvakrát menší počet způsobů výběru, tj. 147 způsobů.

Posádka kosmické lodi

V případě, kdy počet možných výběrů závisí při každém kroku na tom, jaké prvky byly vybrány dříve, je vhodné znázornit proces sestavování skupin pomocí tzv. stromu. Nejprve vedeme z předem zvoleného bodu tolik úseček, kolik existuje různých výběrů při prvním kroku (tedy každá úsečka odpovídá jednomu prvku). Z krajního bodu každé sestrojené úsečky vedeme dále tolik úseček, kolik výběrů lze provést ve druhém kroku — za předpokladu, že v prvním kroku byl vybrán daný prvek, atd.

Výsledkem této konstrukce je „strom“, z něhož snadno vyčteme počet řešení dané úlohy.

Podívejme se na tento příklad: Je známo, že při sestavování posádek vícemístných kosmických lodí se objevuje problém psychologické shody účastníků kosmického putování. Stává se, že lidé, plně vyhovující jako jednotlivci, nejsou vhodní pro dlouhou společnou cestu. Nyní je naším úkolem sestavit tříčlennou posádku, kterou mají tvořit velitel, inženýr a lékař. Na místo velitele



jsou čtyři kandidáti a_1, a_2, a_3, a_4 , na místo inženýra tři kandidáti b_1, b_2, b_3 , na místo lékaře též tři kandidáti c_1, c_2, c_3 . Provedená prověrka ukázala, že velitel a_1 je psychologicky slučitelný s inženýry b_1, b_3 a lékaři c_2, c_3 ; velitel a_2 s inženýry b_1, b_2 a všemi lékaři; velitel a_3 s inženýry b_1, b_2 a lékaři c_1, c_3 ; velitel a_4 se všemi inženýry a lékařem c_2 . Dále se inženýr b_1 psychologicky neslučuje s lékařem c_3 , inženýr b_2 se neslučuje s lékařem c_1 a inženýr b_3 se neslučuje s lékařem c_2 . Kolika způsoby může být za těchto podmínek sestavena posádka kosmické lodi?

Obr. 5

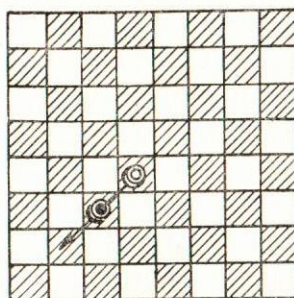
Příslušný strom je uveden na obr. 5. Ukazuje, že existuje pouze 10 přípustných kombinací (kdybychom nebrali v úvahu psychologickou slučitelnost, byl by počet možných trojic podle pravidla součinu $4 \cdot 3 \cdot 3$, tj. 36).

Šachovnicový problém

Jistě znáte hru zvanou dáma. Řešme tuto úlohu:

Kolika způsoby můžeme postavit na šachovnici dvě hrací kostky, bílou a černou, tak, aby bílá kostka mohla „brát“ černou?

Podle známých pravidel hry se kostky staví na černá pole a jedna „bere“ druhou tak, že ji přeskakuje a staví se na další pole (viz obr. 6). Když se kostka dostane do poslední řady, mění



Obr. 6

se v dámu a ohrožuje všechny kostky, které s ní stojí na týchž diagonálách (kromě kostek, jež jsou na koncích těchto diagonál).

Komplikovanost úlohy je v tom, že pro různá postavení bílé kostky existuje různý počet „ohrožených“ postavení černé kostky. Stojí-li např. bílá kostka na poli $a1$, existuje pouze jedno postavení černé kostky, kdy ji lze „vzít“. Stojí-li bílá kostka

	5		5		5		6
1		2		2		1	
	2		4		4		2
2		4		4		2	
	2		4		4		2
2		4		4		2	
	1		2		2		1
1		2		2		1	

a)

	0		0		0		0
0		2		2		1	
	2		4		4		0
0		4		4		2	
	2		4		4		0
0		4		4		2	
	1		2		2		0
0		0		0		0	

b)

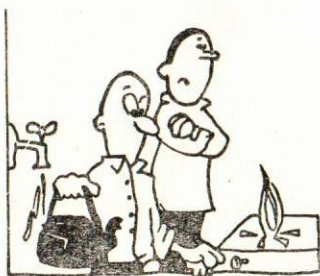
Obr. 7

na poli c3, existují 4 hledané polohy černé kostky. Dojde-li bílá kostka na pole h8 a změní se tak v dámu, existuje 6 ohrožených postavení černé kostky.

Zřejmě bude nejjednodušší zjistit pro každé postavení bílé kostky počet možných ohrožených poloh černé kostky a jednotlivé dílčí výsledky pak sečíst. Na obr. 7a je šachovnice s příslušnými čísly. Sečteme-li je, dostáváme výsledek 87. Existuje tedy celkem 87 možných rozestavení kostek, která vyhovují podmínce v textu úlohy.

Je zřejmé, že právě tolik je těch postavení, kdy černá kostka „bere“ bílou. Ale postavení, kdy se obě kostky mohou „brát“ vzájemně, bude méně. Stojí-li např. bílá kostka na kraji šachovnice, nemůže ji černá kostka ohrozit z žádného pole. Proto všem polím na kraji šachovnice odpovídá číslo 0. Stejným způsobem najdeme čísla přiřazená všem dalším černým polím (viz obr. 7b). Po sečtení těchto čísel dospíváme k tomu, že hledaných postavení je 50.

Najdeme nakonec počet postavení bílé a černé kostky, kdy ani jedna z nich neohrožuje druhou. Tuto úlohu bychom mohli



Obr. 8

řešit stejným způsobem jako předcházející případy — uvažovali bychom postupně všechny možné polohy bílé kostky a vždy vypočetli, kolika způsoby je možno postavit černou kostku tak, aby ani jedna z nich nemohla „brát“ druhou. Bude však jednodušší použít „principu čajníku“* a převést řešení této úlohy na předchá-

* Vypráví se, že jednou matematik položil fyzikovi tuto otázku: „Před Vámi je prázdný čajník a nerozžehnutý plynový vaříč. Jak uvaříte vodu?“ „Naplním čajník vodou, zažehnu plyn a postavím čajník na vaříč,“ odpověděl fyzik. „Správně,“ řekl matematik. „Ale teď řešte druhý úkol: Před zažehnutým vaříčem stojí čajník naplněný vodou. Jak uvaříte vodu?“ „To je ještě jednodušší — postavím čajník na vaříč.“ „Nic takového,“ vykřikl matematik. „Je zapotřebí zhasnout plyn, vylít vodu z čajníku — a přecházíme tak k první úloze, kterou již umíme řešit!“

Proto také, když převádíme novou úlohu na úlohy dříve už řešené, říkáme žertem, že přijímáme „princip čajníku“.

zející už vyřešené případy. Nejprve zjistíme, kolika způsoby lze na šachovnici postavit bílou a černou kostku. Bílou kostku můžeme postavit na každé z 32 černých polí. Pro černou kostku pak zbývá 31 polí. Podle pravidla součinu existuje $32 \cdot 31$, tj. 992 způsobů rozestavení uvažovaných kostek. Z nich je však 87 takových, kdy bílá kostka může „brát“ černou, a 87 těch, kdy černá kostka „bere“ bílou. Proto bychom měli od získaného výsledku odečíst číslo $2 \cdot 87$, tj. 174. Musíme si však uvědomit, že některá z těchto vynechaných postavení jsme vlastně odečetli dvakrát, a to právě ta, kdy bílá a černá kostka se mohou „brát“ vzájemně. Zjistili jsme už, že takovýchto postavení je 50. Proto počet postavení bílé a černé kostky, kdy ani jedna z nich nemůže ohrozit druhou, je

$$992 - 174 + 50 = 868.$$

Kolik lidí neovládá cizí jazyky?

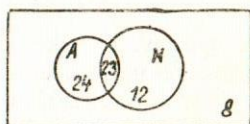
Metoda, kterou jsme řešili poslední ze šachovnicových problémů, se v kombinatorice velmi často používá. Podívejme se na tento problém:

Ve vědeckovýzkumném ústavu pracuje 67 lidí, 47 z nich ovládá angličtinu, 35 němčinu a 23 zná oba z těchto jazyků. Kolik pracovníků ústavu neumí ani německy, ani anglicky?

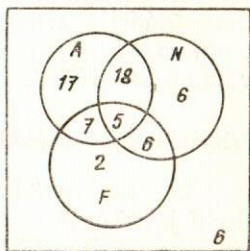
Rozdělme kolektiv pracovníků ústavu na části, které nemají žádné společné prvky. Do první z nich budou patřit ti, kteří znají pouze angličtinu, do druhé všichni, kteří umějí jenom německy, do třetí části budou náležet takoví, kteří ovládají oba jazyky, a do čtvrté všichni, kteří neznají ani jeden, ani druhý jazyk (obr. 9). Víme, že do třetí části patří 23 lidí. Vzhledem k tomu, že angličtinu zná 47 lidí, ovládá jenom angličtinu $47 - 23 = 24$ pracovníků ústavu. Obdobně jenom němčinu ovládá $35 - 23 = 12$ lidí. Odtud vyplývá, že celkový počet pracovníků, kteří ovládají aspoň jeden z jazyků, je $23 + 24 + 12 = 59$. V ústavu pracuje celkem 67 lidí, a tedy v čtvrté části je $67 - 59$ pracovníků. Jinak řečeno, 8 lidí neumí ani anglicky, ani německy.

Tento závěr můžeme zapsat ve tvaru

$$8 = 67 - (23 + 24 + 12).$$



a)



b)

Obr. 9

Ale 24 jsme získali odečtením čísla 23 od čísla 47 a obdobně číslo 12 odečtením 23 od 35. Proto

$$8 = 67 - 23 - (47 - 23) - (35 - 23) = 67 - 47 - 35 + 23.$$

A tady už je vidět určitá zákonitost: Od celkového počtu pracovníků odečítáme počet ovládajících angličtinu a počet ovládajících němčinu. Přitom jsou však někteří pracovníci „odečítáni“ dvakrát — to jsou ti pracovníci, kteří ovládají oba jazyky. Jestliže jejich počet přičteme, dostaneme počet osob, které neznají ani jeden z uvedených jazyků.

Uvedeme obtížnější variantu tohoto typu úlohy; přidáme ještě jeden jazyk. Nechť francouzštinu ovládá 20 lidí, angličtinu a francouzštinu 12 lidí, němčinu a francouzštinu 11 lidí a všechny tři jazyky 5 lidí. Je zřejmé, že jenom anglicky a francouzsky, a nikoliv německy, umí $12 - 5 = 7$ pracovníků ústavu, jenom francouzštinu a němčinu zná $11 - 5 = 6$ lidí. To ale dále znamená, že jenom francouzštinu ovládají 2 lidé ($20 - 7 - 6 - 5$). Tito dva patří do skupiny 8 lidí, kteří neumějí ani anglicky, ani německy. Odtud plyne, že počet pracovníků, kteří neznají ani jeden ze tří jazyků, je $8 - 2$, tj. 6.

Získaný závěr můžeme zapsat takto:

$$\begin{aligned} 6 &= 8 - 2 = 67 - 47 - 35 + 23 - (20 - 7 - 6 - 5) = \\ &= 67 - 47 - 35 + 23 - 20 + (12 - 5) + (11 - 5) + 5 = \\ &= 67 - 47 - 35 - 20 + 23 + 12 + 11 - 5. \end{aligned}$$

A nyní už je zákon úplně jasný. Nejprve od celkového počtu pracovníků odečteme počet těch, kteří znají jeden z jazyků (přitom mohou znát i další jazyky). Ti, kteří ovládají dva jazyky, jsou však „odečtení“ dvakrát. Proto přičítáme čísla 23, 12, 11, která udávají, kolik lidí umí dva jazyky (a třebas i třetí). Ale osoby, které ovládají všechny tři jazyky, jsou nejprve třikrát „odečteny“ a potom třikrát „přičteny“. Poněvadž i ty musíme „odečíst“, je nutno ještě získaný výsledek zmenšit o číslo 5.

Princip inkluze a exkluze

Uvedené příklady dovolují zformulovat obecný zákon. Nechť je dáno N předmětů, z nichž některé mají vlastnosti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Přitom každý z těchto předmětů může mít jednu nebo několik z uvedených vlastností, nebo nemusí mít ani jednu z nich. Označme $N(\alpha_i \alpha_j \dots \alpha_k)$ počet předmětů, které mají vlastnosti

$\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_k$ (přičemž nevylučujeme, že mají i některé další vlastnosti). Budeme-li chtít zdůraznit, že bereme jenom předměty, jež nemají určitou vlastnost, pak tuto vlastnost zapíšeme s čárkou. Např. $N(\alpha_1\alpha_2\alpha_4)$ označuje počet předmětů, které mají vlastnosti α_1 a α_2 , ale nemají vlastnost α_4 (otázka ostatních vlastností zůstává otevřena).

Počet předmětů, jež nemají žádnou z uvedených vlastností, pak v souladu s dříve provedenými úmluvami označíme symbolem $N(\alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_n)$. Obecný zákon zní takto:

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_n) = & N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1\alpha_2) + \\ & + N(\alpha_1\alpha_3) + \dots + N(\alpha_1\alpha_n) + \dots + N(\alpha_{n-1}\alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - \dots \\ & \dots - N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) + \dots + (-1)^n N(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Algebraický součet se zde vztahuje na všechny skupiny o vlastnostech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (bez přihlídnutí k jejich pořadí). Přitom znak $+$ je právě u těch sčítanců, jimž přísluší sudý počet uvažovaných vlastností, znak $-$, je-li tento počet liché číslo. Např. $N(\alpha_1\alpha_3\alpha_6\alpha_8)$ je zde se znakem $+$, $N(\alpha_3\alpha_4\alpha_{10})$ se znakem $-$. Vzorec (2) nazýváme *principem inkluze a exkluze* (nebo také *principem připojování a vylučování*); nejprve se vylučují všechny předměty, které mají aspoň jednu z vlastností $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, potom se připojují předměty, jež mají aspoň dvě z těchto vlastností, vylučují se ty, které mají aspoň tři vlastnosti atd.

Dokažme vzorec (2). D ů k a z provedeme pomocí matematické indukce podle počtu vlastností. Pro případ jedné vlastnosti je vzorec zřejmý. Každý předmět buď uvedenou vlastnost má, nebo ji nemá. Proto

$$N(\alpha') = N - N(\alpha).$$

Předpokládejme nyní, že vzorec (2) je dokázán pro případ, kdy počet vlastností je $n-1$:

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_{n-1}) = & N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_{n-1}) + N(\alpha_1\alpha_2) + \dots + \\ & + N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) - \dots - N(\alpha_{n-3}\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}) + \dots + \\ & + (-1)^{n-1} N(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Tento vzorec podle předpokladu platí pro libovolný souhrn předmětů. Speciálně platí i pro skupinu předmětů, které

mají vlastnost α_n [a jejichž počet je $N(\alpha_n)$]. Pro tuto skupinu nabývá vzorec (3) tvaru

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_{n-1}\alpha_n) &= N(\alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_n) - \ldots - N(\alpha_{n-1}\alpha_n) + \\ &+ N(\alpha_1\alpha_2\alpha_n) + \ldots + N(\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_n) - \ldots + \\ &+ (-1)^{n-1}N(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n) \end{aligned} \quad (4)$$

(všimněme si, že v každém případě bereme pouze předměty, které mají vlastnost α_n).

Odečteme rovnost (4) od rovnosti (3). Na pravé straně dostaneme to, co potřebujeme — pravou stranu vzorce (2). A na levé straně dostáváme rozdíl

$$N(\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_{n-1}) - N(\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_{n-1}\alpha_n). \quad (5)$$

Ale $N(\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_{n-1})$ je počet všech předmětů, které nemají žádnou z vlastností $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$; $N(\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_{n-1}\alpha_n)$ značí počet těch předmětů, které nemají vlastnosti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, ale zcela jistě mají vlastnost α_n . To znamená, že rozdíl (5) je právě roven počtu předmětů, které nemají žádnou z vlastností $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. Jinak řečeno

$$N(\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_{n-1}) - N(\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_{n-1}\alpha_n) = N(\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_{n-1}\alpha'_n).$$

Tímto způsobem dospíváme k levé straně vzorce (2). A tím je tento vzorec dokázán pro případ, kdy je počet vlastností roven n .

Vztah (2) platí tedy pro n vlastností, a to za předpokladu, že platí pro $n-1$; pro $n=1$ je už dokázán. Tím je dokázána platnost vzorce (2) pro libovolný konečný počet vlastností.

Vzorec (2) můžeme v symbolické formě vyjádřit takto:

$$N(\alpha'\beta'\ldots\omega') = N(1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\omega). \quad (6)$$

Po odstranění závorek je ovšem třeba součiny $N\alpha\beta\ldots\lambda$ psát ve tvaru $N(\alpha\beta\ldots\lambda)$. Např. místo $N\alpha\beta\gamma\delta$ budeme psát $N(\alpha\beta\gamma\delta)$.

V čem je chyba?

Předseda třídy podal tuto zprávu: „Ve třídě je 45 žáků, z toho je 25 chlapců, 30 žáků má dobrý prospěch, z nich je 16 chlapců. Sportu se věnuje 28 žáků, z toho 18 chlapců a 17 žáků, kteří mají dobrý prospěch. 15 chlapců má dobrý prospěch a současně sportuje.“

Za několik dní si ho pozval třídní učitel (který jako naschvál učí matematiku) a sdělil mu, že ve zprávě je chyba. Zkusme objasnit, jak na to přišel. Zjistíme, kolik je dívek, které nesportují a přitom nemají dobrý prospěch. Označme α_1 příslušnost k mužskému pohlaví, α_2 — dobrý prospěch, α_3 — pěstování sportu. Určeme, čemu je rovno $N(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3)$. Podle podmínek úlohy je

$$N(\alpha_1) = 25, \quad N(\alpha_2) = 30, \quad N(\alpha_3) = 28, \quad N(\alpha_1\alpha_2) = 16,$$

$$N(\alpha_1\alpha_3) = 18, \quad N(\alpha_2\alpha_3) = 17, \quad N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 15.$$

Podle principu inkluze a exkluze dostáváme

$$N(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3) = 45 - 25 - 30 - 28 + 16 + 18 + 17 - 15 = -2.$$

Ale počet dívek ve třídě přece nemůže být záporný! Proto je určité v uvedené zprávě vnitřní rozpor, je nepravdivá.

Eratosthenovo síto

Jednou z největších záhad matematiky je otázka rozložení prvočísel v posloupnosti všech přirozených čísel uspořádaných podle velikosti. Existují případy dvojic prvočísel, mezi nimiž se vyskytuje pouze jedno složené číslo (17 a 19, 29 a 31), jindy však bezprostředně za sebou následuje i milión složených čísel. Dnes už matematici vědí mnoho o tom, kolik prvočísel se vyskytuje mezi N prvními přirozenými čísly. Při těchto výpočtech se ukázala jako velice užitečná metoda, která pochází od starořeckého vědce Eratosthena (žil ve 3. století př. n. l. v Alexandrii).

Eratosthenes se zabýval nejrůznějšími problémy — je autorem zajímavých studií z oblasti matematiky, astronomie i jiných věd. Taková různorodost zájmů ho ovšem vedla k určité povrchnosti. Jeho současníci ho poněkud ironicky nazývali „ve všem druhý“ (druhý matematik po Euklidovi, druhý astronom po Hipparchovi atd.).

V matematice zajímal Eratosthena právě problém, jak najít všechna prvočísla v posloupnosti přirozených čísel od 1 do N .^{*} A vymyslel tuto metodu: Nejprve vyškrtáme všechna čísla dělitelná dvěma (vyjma číslo 2). Potom vezmeme první ze zbývajících čísel — je jím číslo 3. Je zřejmé, že toto číslo je prvočíslo. Nyní vyškrtáme všechna čísla za ním následující, která jsou dělitelná třemi. Prvním nevyškrtnutým číslem bude pak číslo 5. Vyškrtáme

^{*} Eratosthenes počítal číslo 1 mezi prvočísla. Dnes matematici chápou číslo 1 jako číslo zvláštního typu, které nepatří ani k prvočísłům, ani k složeným číslům.

všechna čísla, která následují za ním a jež jsou dělitelná pěti atd. Čísla, která „zbudou“ po všech vyškrtáváních, jsou prvočísla.

V době, kdy žil Eratosthenes, se psalo na voskových tabulkách; čísla se nevyškrtávala, ale vypichovala — tabulky se po popsaném procesu podobaly sítu. Proto tato metoda pro nalezení prvočísel dostala název „Eratosthenovo síto“.

Vypočteme, kolik zůstane čísel v první stovce, jestliže podle Eratosthenovy metody vyškrtáme všechna čísla, která jsou dělitelná jedním z čísel 2, 3, 5. Jinak řečeno, máme tento problém: *Kolik čísel v první stovce přirozených čísel není dělitelných žádným z čísel 2, 3, 5?* Tuto úlohu můžeme řešit podle principu inkluze a exkluze.

Označme α_1 vlastnost čísla být dělitelné dvěma, α_2 — vlastnost dělitelnosti třemi, α_3 — vlastnost dělitelnosti pěti. Potom $\alpha_1\alpha_2$ znamená, že dané číslo je dělitelné šesti, $\alpha_1\alpha_3$ značí, že je dělitelné deseti, $\alpha_2\alpha_3$ — je dělitelné patnácti. Naším úkolem je určit, kolik čísel od 1 do 100 není dělitelné ani dvěma, ani třemi, ani pěti, tj. kolik z nich nemá ani jednu z vlastností $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Podle vzorce (2) dostáváme

$$N(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3) = 100 - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3).$$

Počet čísel od 1 do N , jež jsou dělitelná n , je roven celé části podílu $N:n$. Proto je

$$N(\alpha_1) = 50, \quad N(\alpha_2) = 33, \quad N(\alpha_3) = 20,$$

$$N(\alpha_1\alpha_2) = 16, \quad N(\alpha_1\alpha_3) = 10, \quad N(\alpha_2\alpha_3) = 6, \quad N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 3,$$

a tedy

$$N(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3) = 26.$$

Mezi přirozenými čísly od 1 do 100 tedy existuje 26 čísel, jež nejsou dělitelná žádným z čísel 2, 3, 5. Tato čísla také zůstanou po prvních třech krocích Eratosthenovy metody nevyškrtnutá. Kromě nich zůstanou ještě čísla 2, 3, 5. Je tedy nevyškrtnutých čísel celkem 29.

Z prvního tisíce přirozených čísel zůstane po prvních třech krocích Eratosthenova procesu 269 čísel. To plyne z toho, že v tomto případě

$$N(\alpha_1) = 500, \quad N(\alpha_2) = 333, \quad N(\alpha_3) = 200,$$

$$N(\alpha_1\alpha_2) = 166, \quad N(\alpha_1\alpha_3) = 100, \quad N(\alpha_2\alpha_3) = 66,$$

$$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 33.$$

II. VARIACE, PERMUTACE A KOMBINACE

V předchozí kapitole jsme uvedli několik obecných pravidel řešení kombinatorických úloh. S jejich užitím můžeme řešit úlohy nejrůznějších typů. Ale stejně jako v geometrii neřešíme úlohy většinou pomocí axiómů, ale používáme vět, které jsme z těchto axiómů odvodili, tak i v kombinatorice místo řešení úlohy podle obecných pravidel je často vhodnější užívat hotových vzorců. Některé typy úloh se totiž vyskytují mnohem častěji než jiné. Skupinám, s nimiž se setkáváme v těchto úlohách, dáváme speciální názvy — variace, permutace a kombinace.

Pro počty takových skupin jsou odvozeny speciální vzorce, kterých se používá při řešení různých kombinatorických úloh. S jedním z těchto vzorců jsme se už seznámili — na začátku kapitoly I jsme ukázali, že počet k -variací s opakováním z prvků n druhů je roven n^k . Nyní si objasníme, kolik lze sestavit takových variací v případě, kdy nebudeme dovolovat opakování, tj. když všechny prvky ve variaci jsou vzájemně různé.

Fotbalové mistrovství

V první skupině A třídy mistrovství SSSR v kopané je 17 mužstev. Hraje se o zlaté, stříbrné a bronzové medaile. Kolika způsoby mohou být rozděleny?

Tuto úlohu můžeme řešit na základě pravidla součinu. Zlaté medaile může získat kterékoliv ze 17 mužstev. Jestliže nějaké mužstvo již získá zlaté medaile, zůstane pouze 16 uchazečů o stříbrné medaile. Opakování zde nepřichází v úvahu — jedno mužstvo nemůže vybojovat zlaté a stříbrné medaile současně.

To znamená, že po odevzdání zlatých medailí některému mužstvu zbývá 16 kandidátů na stříbrné medaile. Jsou-li už rozdány zlaté i stříbrné medaile, může bronzové medaile získat jenom jedno ze zbývajících 15 mužstev. Podle pravidla součinu docházíme k závěru, že medaile mohou být rozděleny $17 \cdot 16 \cdot 15$, tj. 4 080 způsoby.