Kombinatorika - vzorové riešenie úlohy č. 33 zo sady na matematickú indukciu

Máme zadanú postupnosť $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, pričom platí

$a_1 = 1$

$a_2 = 3$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pre všetky $n \geq 3$

Máme ukázať, že $a_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

<u>Dôkaz:</u> indukciou

1°) $n = 1$: $a_1 = 1 \leq \frac{7}{4}$ ✓

$n = 2$: $a_2 = 3 = \frac{3 \cdot 16}{16} = \frac{48}{16} \leq \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$ ✓

2°) Majme fixné n.

IP [Predpokladajme, že pre každé prirodzené k také, že $k \leq n$ platí $a_k \leq \left(\frac{7}{4}\right)^k$.

Špeciálnym prípadom toho je, že platí $a_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$ a

$a_{n-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}$.

Sčítaním týchto dvoch nerovností získame

$$a_n + a_{n-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}.$$

(Ak to nie je na prvý pohľad jasné, môžeme to zdôvodniť nasledovne:

Platí $a_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n \quad / + a_{n-1}$

preto aj $a_n + a_{n-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n + a_{n-1}$.

Taktiež platí $a_{n-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \quad / + \left(\frac{7}{4}\right)^n$

preto aj $\left(\frac{7}{4}\right)^n + a_{n-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}$

Keď to teraz dáme dokopy, získame

$$a_n + a_{n-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n + a_{n-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}$$

Využijeme vzťah ako je zadefinovaná postupnosť, teda že $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Keď tu miesto n dosadíme $n+1$, tak máme $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Teda nerovnosť $a_n + a_{n-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}$ môžeme upraviť na $a_{n+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}$.

Ďalej budeme upravovať pravú stranu:

$$\left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{11}{4}$$

Chceli by sme ukázať, že toto je najviac $\left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$, čím by sme potom dostali $a_{n+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$, teda že $a_{n+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$.

Chceme teda:

$$\left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{11}{4} \overset{?}{\leq} \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1} \qquad \Big/ : \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}$$

Môžeme deliť, lebo je to kladné číslo.

$$\frac{11}{4} \overset{?}{\leq} \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$\frac{44}{16} \leq \frac{49}{16} \quad \checkmark$$

INÉ RIEŠENIE:

2°) $$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \overset{IP}{\leq} \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{7}{4} + 1\right) =$$

$$= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{11}{4} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{44}{16} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{49}{16} =$$

$$= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$$

lebo $\frac{44}{16} < \frac{49}{16}$