[2.11.1]
Dokážte, že ak systém lineárnych rovníc s dvoma neznámymi nad R má dve rôzne riešenia, tak má nekonečne veľa riešení.

[2.11.2a]
Nech $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ukážte, že existuje nekonečne veľa vektorov $\gamma \in V_3(R)$ takých, že rovnica $(x, y, z)A^T = \gamma$ nemá riešenie, a tiež nekonečne veľa takých vektorov, pre ktoré má uvedená rovnica aspoň jedno riešenie.

[2.11.2 b]
Nech $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ je matica nad Z_5. Zistite, pre koľko vektorov $\gamma \in V_3(Z_5)$ rovnica $(x, y, z)A^T = \gamma$ nemá žiadne riešenie.

[2.11.3]
Nech $\alpha = (1, 3, 7)$, $\beta = (2, 1, 2)$, $\gamma = (1, 3, 1)$, $\delta = (4, 3, 2)$. Nájdite skaláry $a, b, c, d \in R$ tak, aby neboli všetky nulové a aby $a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = \mathbf{0}$.

[2.11.4 a]
Nájdite bázu riešení nasledovného systému so 4 neznámymi nad R:

$$x + 2y + 15z - 13t = 4x - 7y + 5t = 17x - 11y + 4z - 3t = 13x - 4y + 4z - 8t = 0$$

[2.11.4 b]
Nájdite bázu riešení nasledovného systému so 4 neznámymi nad R:

$$4x + 2y + 3z - 4t = 3x + 4y + z - 3t = 5x + 3y - 4z - 2t = 2x + 5y - 3z - t = 0$$

[2.11.5 a]
Nájdite bázu riešení nasledovného systému so 6 neznámymi $x_1, \ldots, x_6$ nad R:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3x_3 - 7x_5 = 4x_1 - 3x_2 + x_5 = 0$$

[2.11.5 b]
Nájdite bázu riešení nasledovného systému so 6 neznámymi $x_1, \ldots, x_6$ nad R:

$$x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 = x_4 - x_5 = x_5 - x_6 = 0$$

[2.11.5 cdef]
Nájdite bázu riešení nasledovných homogénych systémov so 6 neznámymi $x_1, \ldots, x_6$ nad R:
c) $x_4 = 0$
d) $x_2 = x_6$
e) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$
f) $0 = 0$

[2.11.6 a]

Nájdite bázu riešení homogénneho systému s maticou $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

nad poľom Z_5.

[2.11.6. b]

Nájdite bázu riešení homogénneho systému s maticou $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

nad poľom Z_5.

[2.11.6 c]

Nájdite bázu riešení homogénneho systému s maticou $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

nad poľom Z_5.

[2.11.7]
Nech $\alpha = (3+i, 2i)$, $\beta = (1-i, 2)$, $\gamma = (3i, 4-3i)$ sú vektory z $V_2(C)$, kde C je pole komplexných čísiel. Nájdite všetky trojice komplexných koeficientov a, b, c takých, aby

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Existujú reálne koeficienty s touto vlastnosťou?

[2.11.9]
Nájdite homogénny systém rovníc s najmenším počtom rovníc, aby vektory $(2,3,1,0), (3,1,4,2), (1,3,3,2) \in V_4(Z_5)$ boli jeho riešeniami. (Hľadajte netriviálne rovnice, t.j. nie rovnice typu 0=0, ktoré by tiež "boli dobré".)

[2.11.10]
Nájdite homogénny systém lineárnych rovníc, ktorého podpriestorom riešení je $S = \{(2a-b-c, 3a-b+2c, a-2b+3c, c);\ a,\ b,\ c \in R\}$.

[2.11.11]

Nájdite bázy podpriestorov $S,\ T,\ S{\cap}T,\ S{+}T \subseteq V_4(Z_5)$, keď $S = [(1,3,0,2),\ (0,2,3,1),\ (1,0,1,2)]$ a $T = \{(a,\ b,\ c,\ d);\ b+d =\ 2a+c+d =\ 4a+2c+d = 0\}$.

[2.11.12 a]
Nájdite bázy podpriestorov $S,\ T,\ S{\cap}T,\ S{+}T \subseteq V_5(Z_5)$, keď $S = \{(a,\ b,\ c,\ d,\ e);\ 4a+b+e =\ 2b+c+2d =\ a+b+c = 0\}$ a $T = \{(a,\ b,\ c,\ d,\ e);\ a+c+e = 2a+c+3d+e =\ 4a+2c+e = 0\}$.

[2.11.12 b]
Nájdite bázy podpriestorov $S,\ T,\ S{\cap}T,\ S{+}T \subseteq V_5(Z_5)$, keď $T = [(1,2,3,1,0),\ (0,1,3,3,4)]$ a $S = \{(a,\ b,\ c,\ d,\ e);\ 3a+2b =\ a+d+e =\ 0\}$.

[2.11.13 a]
Ukážte, že jednorozmerných podpriestorov vektorového priestoru $V_5(Z_3)$ je rovnako veľa, ako štvorrozmerných podpriestorov tohoto priestoru.

[2.11.13 b]
Ukážte, že dvojrozmerných podpriestorov vektorovévo priestoru $V_5(Z_7)$ je rovnako veľa, ako trojrozmerných podpriestorov tohoto priestoru.

[2.11.14]
Nutná a postačujúca podmienka na to, aby systém lineárnych rovníc s n premennými, maticou systému A a rozšírenou maticou systému A' mal práve jedno riešenie je $\mathrm{h}(A) = \mathrm{h}(A') = n$. Dokážte!

[2.11.15]
Je množina všetkých riešení nehomogénneho systému vektorový priestor?

[2.11.17a]
Môže byť množina všetkých vektorov tvaru

$$(a+3b-1, 3a+4b+5, 4b+1, -a-3) \in V_4(R)$$

kde $a,\ b \in R$, množinou všetkých riešení nejakého systému lineárnych rovníc? Ak áno, nájdite ho.

[2.11.17b]
Môže byť množina všetkých vektorov tvaru

$$(2a+3b+1, a+2, b-1, 3a-b+7) \in V_4(R)$$

kde $a,\ b \in R$, množinou všetkých riešení nejakého homogénneho systému lineárnych rovníc? Ak áno, nájdite ho.

[2.11.18]
Ak existuje, nájdite taký nehomogénny systém lin. rovníc nad R, aby tento nemal žiadne riešenie, a aby vektor $(1,-1,2,-4) \in V_4(R)$ bol riešením príslušného homogénneho systému. Ak neexistuje, dokážte!

[2.12.3]
Ak existuje, nájdite maticu lineárneho zobrazenia φ takého, že $\varphi : V_4(Z_7) \to V_4(Z_7)$, $J_\varphi = [(3,2,1,4),(2,3,5,1)]$, $O_\varphi = [(2,4,6,1],(3,5,1,2)]$ a pritom je $\varphi((3,3,5,1)) = (5,2,0,3)$.

[2.12.5]
Nech A je štvorcová singulárna matica nad poľom F. Dokážte, že existuje taká nenulová matica B, že $AB = BA = \mathbf{0}$.

[2.12.6]
Nech $n > 1$ je prirodzené číslo a F je pole. Dokážte, že existuje taká nenulová matica A nad poľom F, že $A^{n-1} \neq \mathbf{0}$ a $A^n = \mathbf{0}$.