[2.1.1]
Nech $M = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in Q\}$ Dokážte, že M je vektorový priestor nad poľom Q. $M \subseteq R$, sčítanie prvkov M (vektorov) definujeme ako normálne sčítanie reálnych čísiel. Násobenie (racionálne číslo).(prvok z množiny M) je definované ako normálne násobenie dvoch reálnych čísiel.

[2.1.2]
Dokážte, že množina R všetkých reálnych čísel je vektorový priestor nad Q vzhľadom na obvyklé sčitovanie a násobenie. (Je Q vektorový priestor nad poľom R?)

[2.1.3]
Ukážte, že všetky komplexné čísla tvoria vektorový priestor nad poľom R (tento v.p. môžeme označiť ako $C(R)$). Ukážte, že všetky komplexné čísla tvoria vektorový priestor nad poľom C (tento v.p. môžeme označiť ako $C(C)$).

[2.1.4]
Ukážte, že každé pole F je vektorový priestor nad poľom F (so sčítaním a násobením "zdedeným" z poľa F).

[2.1.5]
Vymenujte všetky vektory v.p. $V_3(Z_3)$.

[2.1.6]
Koľko prvkov (vektorov) má v.p. $V_n(Z_p)$ (p je samozrejme prvočíslo)?

[2.1.7]
Podrobne overte, že $R_{n+1}[x]$ a $R[x]$ sú v.p. nad poľom R.

$$R_{n+1}[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R\}$$

je množina polynómov stupňa nanajvýš n s reálnymi koeficientami ($n+1$ v definícii je preto, lebo tieto polynómy môžu obsahovať $n+1$ členov tvaru ax^i). a_n môže byť 0.

Sčítanie: ak $\alpha = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $\beta = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$. Potom

$$\alpha + \beta = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Násobenie reálnym číslom: ak $\alpha = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $c \in R$, tak

$$c.\alpha = (ca_n)x^n + (ca_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (ca_1)x + (ca_0)$$

čiže sčítanie a násobenie sú "urobené" známym spôsobom.

$R[x]$ je definované podobne, v množine povolíme polynómy všetkých možných stupňov, t.j.

$$R[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; n \in N \ \& \ a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R\}$$

Sčítanie dvoch polynómov a násobenie reálne číslo krát polynóm sme popísali pri definícii $R_{n+1}[x]$.

[2.2.1 abc]
Zistite, či sú dané podmnožiny vekt. priestoru $V_3(R)$ podpriestormi $V_3(R)$, prípadne $R^{<0,1>}$:
a) $A_1 = \{(a,\ b,\ c);\ a+b+c=0\}$
b) $A_2 = \{(a,\ b,\ c);\ |a|=|b|\}$
c) $A_3 = \{f \in R^{<0,1>}; |f(x)| \geq 1\}$

[2.2.1 def]
Zistite, či sú dané podmnožiny vekt. priestoru $V_3(R)$ podpriestormi $V_3(R)$, prípadne $R^{<0,1>}$:
d) $A_4 = \{f \in R^{<0,1>}; 2f(\frac{1}{3}) - 3f(\frac{2}{5}) = 0\}$
e) $A_5 = \{(a,\ b,\ c);\ \max\{a,b,c\} = 0\}$
f) $A_6 = \{(a,\ b,\ c);\ a+b+c \geq 0\}$

[2.2.1 ghi]
Zistite, či sú dané podmnožiny vekt. priestoru $V_3(R)$ podpriestormi $V_3(R)$, prípadne $R^{<0,1>}$:
g) $A_7 = \{(a,\ b,\ c);\ 2a = b = -c\}$
h) $A_7 = \{(a,\ b,\ c);\ a^2 = b^2\}$
i) $A_3 = \{(a,\ b,\ c);\ 2a+b-c=0, a-2b=0\}$

[2.2.2 cde]
Zistite, či sú dané podmnožiny vektorové podpriestory v.p. $R^{<0,1>}$:
c) $B_3 = \{f;\ |f(x)| \geq 0\}$
d) $B_4 = \{f;$ f je monotónna $\}$
e) $B_5 = \{f;\ f(x) = f(1-x)\}$

[2.2.2 gh]
Zistite, či sú dané podmnožiny vektorové podpriestory v.p. $R^{<0,1>}$:
g) $B_6 = \{f;\ f(1) = f(0)+1\}$
h) $B_4 = \{f; 2f(0) = f(1)\}$

[2.2.3 abc]
Zistite, či sú platí $[\alpha, \beta, \gamma] = V_3(R)$, ak
a) $\alpha = (1,1,0), \beta = (1,1,1), \gamma = (1,0,1)$
b) $\alpha = (1,2,-2), \beta = (1,0,-3), \gamma = (1,-1,-1)$
c) $\alpha = (1,a,b), \beta = (0,1,c), \gamma = (0,0,1)$

[2.2.4 abc]
Nech $f, g : R \to R$ sú $f(x) = 1$ a $g(x) = \cos(x)$ pre $x \in R$. Nech $M = [f, g]$ je podpriestor priestoru $R^R(R)$.
a) Opíšte množinu M (podľa definície)
b) ak $f_1(x) = \cos^2(x)$ a $g_1(x) = \sin^2(x)$, tak $M = [f_1, g_1]$. Dokážte!

c) Patrí funkcia $sin(x)$ do podpriestoru M

[2.2.5 ab]
Nech $f, g : R \to R$ sú $f(x) = \cos(x)$ a $g(x) = \sin(x)$ pre $x \in R$. Nech $M = [f, g]$ je podpriestor priestoru $R^R(R)$.

a) Patria funkcie $\cos(2x), \cos^2(x), 2\sin(x + \frac{\pi}{3}), -\frac{1}{2}\cos(-x + \frac{\pi}{4})$ do množiny M?

b) ak $N = \{f;\ f(x) = a\cos(x + b)\ \&\ a, b \in R\}$, tak $M = N$. Dokážte!

[2.2.6 a]
Nech $M = [(1, -2, 1), (0, 1, -2)] \subseteq V_3(R)$. Nájdite $a,\ b,\ c \in R$ tak, aby $M = \{(x, y, z);\ ax + by + cz = 0\}$.

[2.2.6 b]
Nech $M = [(1, -1, 2), (1, 3, -2)] \subseteq V_3(R)$. Nájdite $a,\ b,\ c \in R$ tak, aby $M = \{(x, y, z);\ ax + by + cz = 0\}$.

[2.2.7]
Nech $M = \{(x, y, z);\ 2x + 3y + 5z = 0\}$. Ukážte, že M je podpriestor priestoru $V_3(R)$ a nájdite dva vektory, ktoré generujú M.

[2.2.8]
Koľko vektorov obsahuje podpriestor priestoru $V_3(Z_3)$ generovaný vektormi

a) $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$

b) $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$

[2.2.9]
Charakterizujte z geometrického hľadiska podpriestory vektorového priestoru

a) $V_1(R)$, b) $V_2(R)$, c) $V_3(R)$

[2.2.10]
Dokážte, že pre ľubovoľné $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V(F)$ je $[\alpha, \beta, \gamma] \subseteq [\alpha, \beta, \gamma, \delta]$.

[2.2.11]
Nech pre vektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma \in V(F)$ platí $\beta \notin [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ a $\beta \in [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma]$. Potom $\gamma \in [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta]$. Dokážte!

[2.2.12]
Nech $\alpha, \beta, \gamma \in V(R)$. Dokážte, že platí: $[\alpha, \beta, \gamma] = [\alpha + \beta, \alpha - \beta, \gamma]$. Platí to pre $\alpha, \beta, \gamma \in V(Z_2)$?

[2.2.13]
Dokážte, že postupnosti reálnych čísiel, ktoré majú len konečný počet nenulových členov (t.j. $\{f : N \to R;\ (\exists n \in N)(\forall m \geq n) f(m) = 0\}$), tvoria podpriestor priestoru $R^N(R)$.