[2.3.1]
Dokážte, že ak sú vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ lineárne závislé a $n \geq r$, tak aj $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_n$ sú LZ. (Pravdaže, všetky vektory patria do jedného vektorového priestoru).

[2.3.2]
Nech sa v systéme vektorov $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V(F)$ niektoré dva vektory líšia len skalárnym násobkom (t.j. existujú $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$ a $c \in F$ tak, že $\alpha_i = c \cdot \alpha_j$ alebo $c \cdot \alpha_i = \alpha_j$). Dokážte, že vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sú LZ.

[2.3.3 ab]
Zistite, či sú uvedené vektory LZ:
a) $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,5) \in V_3(R)$
b) $(1,2,3), (1,3,2), (2,1,5), (1,127,3) \in V_3(R)$

[2.3.3 cd]
Zistite, či sú uvedené vektory LZ:
c) $(1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) \in V_3(Z_5)$
d) $(1,3,4), (2,1,3), (3,1,4) \in V_3(Z_7)$ (t.j. to isté ako c) ale nad Z_7)

[2.3.4]
Nájdite štyri vektory z $V_3(R)$ tak, aby každé dva z nich boli lineárne nezávislé.

[2.3.5 ab]
Zistite, či sú vektory
a) $f(x) = 1 + x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$
a) $f(x) = 1$, $g(x) = x + a$, $h(x) = x^2 + bx + c$, $a, b, c \in R$
lineárne závislé vo vektorovom priestore $R^R(R)$

[2.3.5 cd]
Zistite, či sú vektory
c) $f(x) = 1$, $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = \cos^2(\frac{x}{2})$
d) $f(x) = x$, $g(x) = x(x-1)$, $h(x) = x(x-1)(x-2)$
lineárne závislé vo vektorovom priestore $R^R(R)$

[2.3.6 abc]
Nech $\alpha, \beta, \gamma \in V(F)$ sú ľubovoľné vektory. Zistite, či sú nasledovné systémy vektorov lineárne závislé (treba urobiť diskusiu závisiacu na tom, či sú pôvodné vektory LZ alebo nie):
a) $\alpha, \beta, \alpha + \beta, \gamma$
b) $\alpha, \beta, \mathbf{0}$
c) $\alpha, \alpha, \beta, \gamma$

[2.3.6 de]
Nech $\alpha, \beta, \gamma \in V(F)$ sú ľubovoľné vektory. Zistite, či sú nasledovné systémy vektorov lineárne závislé (treba urobiť diskusiu závisiacu na tom, či sú pôvodné vektory LZ alebo nie):

d) $\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\gamma$
e) $\alpha, \alpha+\alpha+\alpha, \beta$

[2.3.7]
Nech $\alpha, \beta, \gamma \in V(F)$ a nech $c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma = \mathbf{0}$, pričom $c_1, c_2, c_3 \in F$ sú také, že $c_1 \cdot c_3 \neq 0$. Dokážte, že $[\alpha, \beta] = [\beta, \gamma]$.

[2.3.8]
Nech $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V(F)$, nech α, β, γ sú lineárne nezávislé a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sú lineárne závislé. Dokážte, že $\delta \in [\alpha, \beta, \gamma]$.

[2.3.9]
Nech $\alpha, \beta, \gamma \in V(F)$ sú lineárne závislé, $\gamma \notin [\alpha, \beta]$. Dokážte, že buď $\alpha = c \cdot \beta$ alebo $\beta = c \cdot \alpha$ pre vhodné $c \in F$.

[2.3.10]
Dokážte, že vektory $(a, b), (c, d) \in V_2(F)$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď $a \cdot d - b \cdot c = 0$

[2.3.11]
Rozhodnite, či platí výrok: Ak vektory $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V(F)$ sú lineárne závislé a γ nie je lineárnou kombináciou α, β, δ, tak vektory α, β, δ sú lineárne závislé. Ak tvrdenie platí, dokážte ho, ak neplatí, uveďte protipríklad.

[2.3.12]
Nech sú vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V(F)$ lineárne nezávislé a nech $\beta \neq \mathbf{0}$. Dokážte, že z vektorov $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (v tomto poradí) možno najviac jeden písať ako lineárnu kombináciu predchádzajúcich.

[2.3.13]
Zistite, či platí: Ak sú vektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V(F)$ lineárne závislé vektory a $\alpha_n \neq \mathbf{0}$, tak jeden z vektorov α_i $(i < n)$ je lineárnou kombináciou nasledujúcich vektorov.

[2.3.14*]
Dokážte, že čísla $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ sú lineárne nezávislé nad poľom Q

[2.3.15*]
Zistite, či vektory $(1, \sqrt{2}), (2, 1), (\sqrt{2}, 1)$ sú lineárne závislé nad poľom Q (R)

[2.3.16*]
Ľubovoľnú množinu $\emptyset \neq A \subseteq V(F)$ budeme nazývať lineárne nezávislou, ak každá jej konečná podmnožina je lineárne nezávislá. $A \subseteq V(F)$ sa nazýva lineárne závislá, ak nie je lineárne nezávislá. Dokážte:
a) Každá podmnožina lineárne nezávislej množiny je lineárne nezávislá

b) Každá množina, ktorá obsahuje lineárne závislú podmnožinu je lineárne závislá

c) Podmnožina $A \subseteq V(F)$ je lineárne závislá práve vtedy, keď jeden z vektorov $\alpha \in A$ je lineárna kombinácia vektorov z $A \setminus \{\alpha\}$

d) Nech $X_i \subseteq V(F)$, X_i sú lineárne nezávislé a $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \cdots$, potom $\bigcup\{X_i; i \in N\}$ je lineárne nezávislá.

[2.4.1 ab]
Nech α, β, γ tvoria bázu vektorového priestoru $V(R)$. Tvoria systémy
a) $\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma$
b) $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\gamma$
bázu priestoru $V(R)$?

[2.4.1 cd]
Nech α, β, γ tvoria bázu vektorového priestoru $V(R)$. Tvoria systémy
c) $\alpha-\beta, \beta-\gamma, \gamma-\alpha$
d) $\alpha+2\beta, \beta+2\gamma, \gamma+2\alpha$
bázu priestoru $V(R)$?

[2.4.2]
Dokážte, že pre každý výber skalárov $a, b, c \in R$ tvoria vektory $(1, a, b), (0, 1, c), (0, 0, 1)$ bázu priestoru $V_3(R)$. Zovšeobecnite toto tvrdenie pre $V_n(R)$.

[2.4.3]
Nájdite všetky bázy vektorových priestorov $V_3(Z_2)$ a $V_2(Z_3)$.

[2.4.4]
Nájdite aspoň tri rôzne bázy priestoru
a) $R_3[x]$ b) $C(R)$ (komplexné čísla nad R) c) $[(1, 2, 3), (2, 2, 4)] \subseteq V_3(R)$
d) $C(C)$ e) $V_n(F)$ f) $V_4(Z_2)$

[2.4.5abc]
Ak sa to dá, doplňte uvedené vektory do bázy príslušného vektorového priestoru:
a) $(1, 1, 2), (2, 1, 3) \in V_3(R)$
b) $x^2-1, x^2+1 \in R_3[x]$
c) $2x-1, x^2+2 \in R_4[x]$

[2.4.5def]
Ak sa to dá, doplňte uvedené vektory do bázy príslušného vektorového priestoru:
d) $(1, 4, 0), (2, 3, 4) \in [(1, 4, 0), (2, 3, 4), (4, 11, 4)] \subseteq V_3(R)$
e) $(1, 2, 3, 0), (3, 4, 1, 2) \in V_4(Z_5)$
f) $1+2\sqrt{3}, 2-3\sqrt{3} \in \{a+b\sqrt{3};\ a, b \in Q\}$

[2.4.6]
Nech $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V(F)$. Vektorový priestor $V(F)$ je generovaný vektormi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (nemusia byť báza). Čo viete povedať o vektoroch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$?

[2.4.7]
Nech S, T sú podpriestory konečnorozmerného vektorového priestoru $V(F)$. Dokážte, že ak $S \subseteq T$ a $d(S) = d(T)$, tak $S = T$.

[2.4.8]
Dokážte, že vektor β je lineárnou kombináciou vektorov $\alpha,\ \gamma,\ \delta$ práve vtedy, keď $d([\alpha,\ \gamma,\ \delta]) = d([\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta])$.

[2.4.9]
Dokážte, že ak $d(V(F)) = n$ tak
a) každá množina $n+1$ vektorov je LZ
b) žiadna množina s $n-1$ vektormi negeneruje $V(F)$

[2.4.10]
Dokážte, že ak je každý z vektorov $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ lineárnou kombináciou vektorov $\beta_1, \ldots, \beta_l$, tak

$$d([\alpha_1, \ldots, \alpha_k]) \leq d([\beta_1, \ldots, \beta_l])$$

[2.4.11*]
Nech $V(F)$ je ľubovoľný vektorový priestor. Podmnožina $X \subseteq V(F)$ sa nazýva bázou priestoru $V(F)$, ak je lineárne nezávislá (pozri cvičenie 2.3.16) a každá množina X_1 taká, že $X \subset X_1 \subseteq V(F)$, $X \neq X_1$ je lineárne závislá (tiež v zmysle definície z cvičenia 2.3.16)

[2.5.1 a]
Zistite, či je vektorový priestor $V_3(R)$ lineárnym, prípadne direktným súčtom podpriestorov S a T, ak $\quad S = [(1,2,3),(2,4,1)], \quad T = [(1,1,2),(3,3,1)]$.

[2.5.1 b]
Zistite, či je vektorový priestor $V_3(R)$ lineárnym, prípadne direktným súčtom podpriestorov S a T, ak $\quad S = [(1,4,1),(1,3,1)] \quad T = [(1,2,1)]$.

[2.5.1 c]
Zistite, či je vektorový priestor $V_3(Z_5)$ lineárnym, prípadne direktným súčtom podpriestorov S a T, ak $\quad S = [(1,0,3),(2,4,0)] \quad T = [(1,0,4),(2,3,1)]$.

[2.5.2]
Nech $T = [(1,3,2),\ (2,1,3),\ (3,4,0)] \subseteq V_3(Z_5)$. Ak existujú, nájdite dva rôzne podpriestory S_1, S_2 také, aby $T \oplus S_1 = V_3(Z_5)$ a tiež $T \oplus S_2 = V_3(Z_5)$.

[2.5.3]
Nech S, T sú podpriestoru $V_4(Q)$, $S = [(1,-1,2,-3),(1,1,2,0),(3,-1,6,-6)]$, $T = [(0,-2,0,-3),(1,0,1,0)]$. Nájdite $d(S), d(T), d(S+T), d(S \cap T)$.

[2.5.4]
Nech $S \neq T$ sú podpriestoru $V_3(F)$, pričom $d(S) = d(T) = 2$. Dokážte, že $d(S \cap T) \geq 1$.

[2.5.5]

Nech tri podpriestory S, T, T' konečnorozmerného vektorového priestoru $V(F)$ spĺňajú podmienky $S \cap T = S \cap T'$, $\quad S + T = S + T'$ $\quad$ a $\quad T \subseteq T'$. Dokážte, že $\quad T = T'$!

[2.5.6]
Nech $S \oplus T = V(F)$. Nech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ sú LN a $\beta_1, \ldots, \beta_r \in T$ sú LN. Potom systém vektorov $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_r$ je tiež LN. Dokážte!

[2.5.7]
Nech S, T sú podpriestoru $V_n(F)$. Nech $d(S) = s, d(T) = t$. Akú najväčšiu dimenziu môže mať $S + T$ a akú najmenšiu dimenziu môže mať $S \cap T$?

[2.5.8]
Nech S, T sú podpriestory konečnorozmerného vektorového priestoru $V(F)$. Dokážte, že existujú podpriestory $A,\ B,\ C \subseteq V(F)$ tak, že $\quad S = A \oplus B, \quad T = A \oplus C$ $\quad$ a $\quad B \cap C = \{\mathbf{0}\}$.