[2.6.2]
Dokážte, že pre každé dve matice A, B rovnakého typu platí:

a) $(A^T)^T = A$

b) $(A = B)^T = A^T + B^T$

[2.6.4]
Matica A sa nazýva symetrická, ak $A^T = A$, antisymetrická, ak $A^T = -A$.

a) Napíšte jednu symetrickú maticu A, ktorá má 4 riadky. Napíšte jednu antisymetrickú maticu B, ktorá má 4 riadky.

b) Existuje neštvorcová symetrická (antisymetrická) matica?

c) Dokážte, že nad poľom R je každá štvorcová matica B súčte symetrickej a antisymetrickej matice.

[2.6.5]
Definujme maticu $E_{rs} = ||e_{ij}||_{m\times n}$ tak, že $e_{ij} = 1$ ak $i = r$, $j = s$, inak je e_{ij} je 0. Pre typ 2×3 je napríklad

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dokážte, že matice všetky E_{rs} typu $m \times n$ sú lineárne nezávislé vektory vektorového priestoru všetkých matíc typu $m \times n$ nad poľom F.

b) Napíšte nejakú maticu A typu 3×2 ako lineárnu kombináciu matíc E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{31}, E_{32} typu 3×2.

c) Dokážte, že matice všetky E_{rs} typu $m \times n$ tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu $m \times n$ nad poľom F.

d) Nájdite ešte dve iné bázy priestoru $M_{3,2}(R)$ (t.j. priestoru všetkých matíc typu 3×2 nad poľom R)

[2.6.6]
Akú algebraickú štruktúru tvoria všetky diagonálne matice typu $n\times n$ nad poľom F? (grupu, pole, vektorový priestor?)

[2.6.7]
Riešte podobnú úlohu ako v 6 pre

a) symetrické matice matice typu $n \times n$ nad poľom F

b) antisymetrické matice matice typu $n \times n$ nad poľom F

c) všetky, ktoré nie sú symetrické ani antisymetrické matice (ale sú typu $n \times n$) nad poľom F

[2.7.1]
Vymenujte všetky vektory podpriestoru prislúchajúceho matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[2.7.3]
Dokážte, že pojem riadkovej ekvivalencie sa nezmení, ak namiesto operácie 3. typu zavedieme operáciu:
($3'$) K niektorému riadku matice pripočítame iný riadok.

[2.7.4]
Dokážte, že pojem riadkovej ekvivalencie sa nezmení, ak vynecháme operácie 1. typu (t.j. výmenu dvoch riadkov môžeme nahradiť vhodným použitím operácií 2. a 3. typu)

[2.7.5 abc]
Nájdite trojuholníkové redukované k nasledovným maticiam (nad poľami Q, R, Z_5):

$$a)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

[2.7.6 a]
Zistite, či vektory $(3, 2, 1, 1)$, $(4, 3, 0, 2)$, $(2, 0, 1, 3)$ možno doplniť do bázy $V_4(Z_5)$. Ak áno, urobte to. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť?

[2.7.6 b]
Zistite, či vektory $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 2, 2)$ možno doplniť do bázy $V_4(Z_5)$. Ak áno, urobte to. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť?

[2.7.6 c]
Zistite, či vektory $(1, 3, 1, 4)$, $(3, 2, 4, 3)$, $(2, 3, 1, 1)$ možno doplniť do bázy $V_4(Z_5)$. Ak áno, urobte to. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť?

[2.7.7 a]
Zistite, či nasledujúce matice tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu 2×2 nad poľom R:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

[2.7.7 b]
Zistite, či nasledujúce matice tvoria bázu vektorového priestoru všetkých matíc typu 2×2 nad poľom R:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

[2.7.8 abc]
Zistite, či vektory $(3,2,1,0), (3,4,0,1), (3,3,3,3)$ patria do podpriestoru $[(4,3,2,1), (1,2,3,4), (1,1,1,0)] \subseteq V_4(Z_5)$!

[2.7.8 de]
Zistite, či vektory $(4,4,4,4), (1,2,4,4)$ patria do podpriestoru $[(4,3,2,1), (1,2,3,4), (1,1,1,0)] \subseteq V_4(Z_5)$!

[2.7.9 a]
Zistite, ako závisí hodnosť matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

od parametra c. (Nad poľom reálnych čísiel!)

[2.7.9 b]
Zistite, ako závisí hodnosť matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & t & 2t \\ 1 & -1 & 3 & -t \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

od parametra t. (Nad poľom reálnych čísiel!)

[2.7.10]
Nájdite všetky tie hodnoty parametra c, pre ktoré má priestor

$$[(3,1,1,4),\ (c,4,10,1), (1,7,17,3),\ (2,2,4,1)] \subseteq V_4(R)$$

najmenšiu dimenziu.

[2.7.11]
Nájdite všetky lineárne nezávislé podmnožiny tejto množiny vektorov z $V_3(Z_7)$:

$$\{(1,2,3),\ (2,3,4),\ (3,2,3),\ (4,3,4),\ (1,1,1)\}$$

.

[2.7.12]
Dokážte, že hodnosť matice A typu $m \times n$ nad nejakým poľom F nemôže byť väčšia ani ako m, ani ako n.

[2.7.13]
Dokážte, že nenulové riadky trojuholníkovej matice sú LN.

[2.7.14]
Zistite, či priestor $[(2,4,4,2,4),\ (3,1,1,2,2),\ (4,3,3,2,0)]$ je podpriestorom priestoru $[(1,1,0,1,4),\ (2,1,3,3,1),\ (3,2,1,1,3)]$! (Nad $V_5(Z_5)$.)

[2.7.15]
Ukážte, že maticu $m \times n$ možno upraviť na trojuholníkový redukovaný tvar pomocou najviac m^2 elementárnych riadkových operácií.

[2.7.18]
Zistite, ktoré z matíc sú nad R, Z_5, Z_3 riadkovo ekvivalentné:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$