[2.8.1 c]
Nech je dané $k \in R$. Zistite, či je osová symetria vo $V_2(R)$ s osou $y = kx$ lineárne zobrazenie. Ak áno, nájdite jeho maticu.

[2.8.1 d]
Zistite, či je osová symetria vo $V_2(R)$ s osou $y = 2x + 3$ lineárne zobrazenie. Ak áno, nájdite jeho maticu.

[2.8.2 a]
Zistite, či existuje také lineárne zobrazenie $\varphi : V_4(Z_5) \to V_4(Z_5)$ že platí: $\varphi((1,2,3,1)) = (1,3,1,0)$, $\varphi((2,1,3,0)) = (0,1,3,1)$, $\varphi((3,2,1,0)) = (1,0,3,0)$, $\varphi((2,2,3,4)) = (3,1,0,4)$. Ak existuje, nájdite jeho maticu.

[2.8.2 b]
Zistite, či existuje také lineárne zobrazenie $\varphi : V_4(Z_5) \to V_4(Z_5)$ že platí: $\varphi((1,2,3,1)) = (0,2,0,3)$, $\varphi((3,4,2,2)) = (3,0,4,4)$, $\varphi((4,1,1,1)) = (0,1,4,2)$, $\varphi((1,4,2,3)) = (1,1,1,3)$. Ak existuje, nájdite jeho maticu.

[2.8.3 c]
Zistite, či existuje také lineárne zobrazenie $\tau : V_3(R) \to V_4(R)$ že platí: $\tau((1,1,1)) = (-2,1,2,4)$, $\tau((2,0,1)) = (1,-1,0,-1)$, $\tau((3,1,2)) = (-1,0,2,3)$. Ak áno, nájdite maticu takéhoto lin. zobrazenia.

[2.8.4]
Koľko je všetkých lineárnych zobrazení $V_3(Z_5) \to V_3(Z_5)$? Porovnajte ich počet s počtom všetkých zobrazení $V_3(Z_5) \to V_3(Z_5)$.

[2.8.6]
Dokážte, že podmienky z definície lineárnosti možno nahradiť jedinou podmienkou:

Pre každé $\alpha, \beta \in V(F), a, b \in F$ platí

$$\varphi((a \cdot \alpha + b \cdot \beta)) = a \cdot \varphi(\alpha) + b \cdot \varphi(\beta)$$

[2.8.7]
Dokážte, že lineárne zobrazenie $\varphi : V(F) \to W(F)$ je injektívne práve vtedy, keď pre každý nenulový vektor $\alpha \in V(F)$ platí $\varphi(\alpha) \neq \mathbf{0}$.

[2.8.8]
a) ak $\varphi : V(F) \to W(F)$ je linárne zobrazenie. Ak $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sú LZ vektory, tak aj $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ sú LZ. Dokážte!
b) Dokážte, že podobné tvrdenie neplatí pre LN vektory (t.j., ak $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sú LN, tak $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ nemusia (ale môžu) byť LN.

[2.8.9]

Nech $\varphi : V_m(F) \to V_n(F)$ je zobrazenie, pričom

$$\varphi((x_1, \dots, x_m)) = (f_1(x_1, \dots, x_m), f_2(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)),$$

teda i-tá súradnica vektora $\varphi((x_1, \dots, x_m))$ je funkciou súradníc vektora $(x_1, \dots, x_m)$. Dokážte, že φ je lineárne zobrazenie práve vtedy, keď každé f_i je lineárnou kombináciou prvkov $x_1, \dots, x_m$ s koeficientami z poľa F, t.j. že existujú $a_{ij} \in F$ také, že $f_i(x_1, \dots, x_m) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{im}x_m$ (pre $i = 1, \dots, n$).

[2.8.10]
Nech $\varphi : V(F) \to W(F)$ je lineárne zobrazenie, S je podpriestor $V(F)$, T je podpriestor $W(F)$. Potom
a) množina $\varphi(S) = \{\varphi(\alpha);\ \alpha \in S\}$ je podpriestor $W(F)$ ($\varphi(S)$ sa nazýva obraz podpriestoru S v zobrazní φ)
b) množina $\{\alpha \in V(F);\ \varphi(\alpha) \in T\}$ je podpriestor vektorového priestoru $V(F)$ (uvedená množina sa nazýva vzor podpriestoru T v zobrazení φ). Pre špeciálny prípad, keď $T = \{\mathbf{0}\}$ uvedenú množinu nazývame jadro lineárneho zobrazenia φ a označujeme ju $\operatorname{Ker}\varphi$ (t.j. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\alpha \in V(F);\ \alpha\varphi = \mathbf{0}\}$ a je to teda podľa tohoto tvrdenia podpriestor $V(F)$).

[2.9.3]
Ak má zmysel súčin AB matíc A, B, tak pre ľubovoľný skalár $d \in F$ platí:

$$(dA)B = d(AB), \quad A(dB) = d(AB)$$

[2.9.4]
Nezáporné mocniny štvorcovej matice A definujeme rekurentne takto: $A^0 = I$, $A^{n+1} = AA^n$. Nech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte

a) $A^2 + AB - 2B$

b) $(A + C - I)(A - C + I) - (A + 2D)(D - A)$

c) $A^2 + 2AC + C^2$

d) $(A + C)^2$

e) $(A + C)^3$

[2.9.5]
Nájdite všetky matice typu 2×2, pre ktoré platí $A^2 = \mathbf{0}$ a) nad poľom Q, b) nad poľom Z_5.

[2.9.6]
Nech A je matica $n \times n$ nad poľom F. Dokážte, že existuje prirodzené číslo m a koeficienty $c_0, c_1, \ldots, c_m \in F$, $c_m \neq 0$ tak, že

$$c_0 I + c_1 A + \ldots + c_m A^m = \mathbf{0}$$

[2.9.7]
Dokážte, že $(AB)^T = B^T A^T$ (t.j. pri transponovaní súčinu matíc je potrebné zmeniť poradie)

[2.9.8]
Zistite, ktorá z uvedených množín matíc tvorí pole vzhľadom na sčitovanie a násobenie matíc

a) všetky matice tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$, $a, b \in Q$

b) všetky matice tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in Q$

c) všetky matice tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in Q$

d) všetky matice tvaru $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in Q$ (t.j. všetky diagonálne matice)

e) podobné množiny matíc ako v a) - d), ale nad poľom Z^5, t.j. vždy bude $a, b \in Z_5$

[2.9.9]

a) Dokážte: Ak A je symetrická matica, tak aj A^2 je symetrická

b) Platí podobné tvrdenie pre antisymetrické matice (resp., čo viete dokázať pre antisymetrické matice)?

c) Zovšeobecnite a), b) pre ľubovoľný exponent $n \in N$

[2.9.10]
Skúmajme "nový súčin" matíc $A \times B$ vhodného typu, ktorý dostaneme tak že "násobíme riadky" matice A riadkami matice B (v normálnom súčine matíc sa (voľne povedané) násobia riadky matice A stĺpcami matice B). Je tento nový súčin asociatívny? Je komutatívny?

[2.9.12]

a) Nájdite všetky matice A typu 3×3 nad poľom Q, ktoré komutujú s diagonálnou maticou $D = \|d_{ij}\|_{3\times 3}$, ktorá má na diagonále prvky $1,\ 2,\ 3$, t.j. $d_{11} = 1$, $d_{22} = 2$, $d_{33} = 3$ (úloha je teda nájsť matice A nad Q, pre ktoré platí $AD = DA$)

b) Nech A je štvorcová matica nad poľom F. Dokážte, že množina všetkých štvorcových matíc B ktoré komutujú s A (t.j. pre ktoré platí $BA = AB$) je uzavretá vzhľadom na sčítanie a násobenie matíc.