[2.10.1]

Nájdite inverznú maticu k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nad poľom Z_5.

[2.10.2]
Nech $\varphi : V_4(Z_5) \to V_4(Z_5)$ je také lineárme zobrazenie, že $\varphi((1,2,3,1)) = (2,0,1,0)$, $\varphi((0,2,3,1)) = (1,2,0,3)$, $\varphi((1,0,3,4)) = (3,2,1,0)$ a $\varphi((4,1,3,2)) = (2,3,1,1)$. Nájdite maticu zobrazenia φ^{-1} (nie je potrebné hľadať maticu zobrazenia φ.)

[2.10.3]
Nech $\varphi : V_3(R) \to V_2(R)$ je také lineárne zobrazenie, že $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$ pre každé $x_1, x_2, x_3 \in R$. Nech zobrazenie $\psi : V_2(R) \to V_3(R)$ je dané predpisom $\psi((1,2)) = (1,1,1)$, $\psi((1,1)) = (1,-1,1)$. Je zobrazenie $\varphi \circ \psi$ alebo $\psi \circ \varphi$ bijektívne?

[2.10.4]
a) Dokážte, že súčin singulárnej matice A s akoukoľvek štvorcovou maticou (vhodného rozmeru) B je singulárna matica (t.j. obidve AB, BA sú singulárne)
b) Dokážte, že súčin dvoch regulárnych matíc A, B, ak existuje, je regulárna matica. Dokážte, že v tomto prípade platí aj $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

[2.10.5]
Dokážte, že štvorcová matica A je regulárna práve vtedy, keď k nej transponovaná (t.j. A^T) je regulárna.

[2.10.6 a)]
Nech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nájdite (ak existuje) maticu X takú, aby $X \cdot A = B$.

[2.10.7]
Dokážte, že lineárne zobrazenie $\varphi : V(F) \to W(F)$ je injektívne práve vtedy, keď zobrazuje lineárne nezávislé vektory na lineárne nezávislé vektory (t.j. keď má vlastnosť: ak $\alpha_1, \dots \alpha_k \in V(F)$ sú lin. nezávislé (k je ľubovoľné prirodzené číslo), tak $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_k)$ sú lin. nezávislé vo v.p. $W(F)$)

[2.10.9 efg)]
Ktoré z uvedených vektorových priestorov sú izomorfné ? (Všetky sú nad poľom R.)

- $[(3,1,2,4,6),\ (1,3,1,1,0),\ (2,-2,1,3,6),\ (-2,1,0,3,3)]$
- všetky matice tvaru $\begin{pmatrix} xa & 2b \\ c & -a \end{pmatrix}$, kde $a,\ b,\ c \in R$ sú premenné
- všetky vektory $(a,b,c,d,e) \in V_5(R)$, pre ktoré $a + 2c = d$

[2.10.10 a)]
Nech $\varphi : V_m(F) \to V_n(F)$ je lineárne zobrazenie, nech A je jeho matica. Potom φ je surjekcia práve vtedy, keď $m \geq n$ a $\mathrm{h}(A) = n$.

[2.10.10 b)]
Nech $\varphi : V_m(F) \to V_n(F)$ je lineárne zobrazenie, nech A je jeho matica. Potom φ je injekcia práve vtedy, keď $m \leq n$ a $\mathrm{h}(A) = m$.

[2.10.12]
Nech $m > n$ a nech $\varphi : V_m(F) \to V_n(F)$ a $\psi : V_n(F) \to V_m(F)$ sú lineárne zobrazenia. Dokážte, že $\varphi \circ \psi$ nemôže byť regulárne zobrazenie.