[2.12.1a]
Nájdite jadro a obraz lineárneho zobrazenia $\varphi : V_4(Z_5) \to V_4(Z_5)$ daného maticou $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

[2.12.1b]
Nájdite jadro a obraz lineárneho zobrazenia $\varphi : V_4(Z_5) \to V_4(Z_5)$ daného maticou $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

[2.12.1c]
Nájdite jadro a obraz lineárneho zobrazenia $\varphi : V_4(Z_5) \to V_4(Z_5)$ daného maticou $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

[2.12.3]
Ak existuje, nájdite maticu lineárneho zobrazenia φ takého, že $\varphi : V_4(Z_7) \to V_4(Z_7)$, $J_\varphi = [(3,2,1,4),(2,3,5,1)]$, $O_\varphi = [(2,4,6,1],(3,5,1,2)]$ a pritom je $\varphi((3,3,5,1)) = (5,2,0,3)$.

[2.12.5]
Nech A je štvorcová singulárna matica nad poľom F. Dokážte, že existuje taká nenulová matica B, že $AB = BA = \mathbf{0}$.

[2.12.6]
Nech $n > 1$ je prirodzené číslo a F je pole. Dokážte, že existuje taká nenulová matica A nad poľom F, že $A^{n-1} \neq \mathbf{0}$ a $A^n = \mathbf{0}$.

[3.2.2 d]
Dokážte, že v ak grupe $(G, \star)$ platí pre všetky $x \in G$, že $x \star x = e$,
tak G je komutatívna. (e je neutrálny prvok G.)

[3.3.3 a]
Nech $\star$ je asociatívna binárna operácia na neprázdnej množine G, nech každá rovnica tvaru $a \star x = b, y \star a = b$ *pre* $a,\ b \in G$ má v G riešenie. Potom existuje pravý neutrálny prvok operácie $\star$ v G. Dokážte!

[3.4.3 abcd]
Nájdite vlastnú podgrupu (t.j. rôznu od samej seba a od triviálnej grupy obsahujúcej len neutrálny prvok) grupy $R \times R$, ktorá

a) je cyklická

b) nie je cyklická

c) je vektorovým priestorom nad R

d) nie je vektorovým priestorom nad R

[3.4.4 b]
Určte prienik podgrúp $G_1 = [6]$, $G_2 = [4]$ grupy $G = (Q; +)$.

[3.4.5 a]
Nájdite najmenšiu možnú podgrupu grupy $(Z, +)$, ktorá obsahuje čísla 9 a 21.

[3.4.5 b]
Nájdite najmenšiu možnú podgrupu grupy $(Z, +)$, ktorá obsahuje čísla 15 a -35.

[3.4.8 a,b,c]
Zistite, ktoré z nasledujúcich grúp sú cyklické:

$$\text{a)} \quad (Z_3 \times Z_4; \oplus) \quad \text{b)}\ (Z_3 \times Z_3; \oplus) \quad \text{c)}\ (Z_2 \times Z_3 \times Z_5; \oplus)$$

[3.4.13]
Ukážte, že grupa $(C \setminus \{0\}, \cdot)$ obsahuje prvky rádu n pre ľubovoľné $n \in N$ a tiež prvky nekonečného rádu (t.j. nejednotkové prvky, ktorých rád nie je žiadne číslo $n \in N$).

[3.4.14]
Nech $\varphi_i : (Z_{16}, +) \to (Z_{16}, +)$ sú dané predpismi

$$x\varphi_1 = x + x \qquad a \qquad x\varphi_2 = x + x + x.$$

Overte, či sú φ_1 a φ_2 homomorfizmy a zistite, koľko prvkov má grupa $(Z_{16}, +)/Ker\varphi_1$.

[3.4.15]
Nech H je neprázdna konečná podmnožina grupy $(G, \circ)$. Potom H je podgrupa práve vtedy, keď H je uzavretá na operáciu $\circ$, t.j. keď platí podmienka:

i) $a, b \in H \Rightarrow a \circ b \in H$ Dokážte!

[3.4.4 c]
Určte prienik podgrúp G_1, G_2 v grupe $(R; +)$ ak $G_1 = \left[\frac{1}{2}\right]$ a $G_2 = \left[\frac{1}{3}\right]$.

[3.5.6]
Nech p je prvočíslo. Dokážte, že ak má grupa G p^m prvkov, tak G má p prvkovú podgrupu.

[3.5.10]
Nech $(G, \circ)$ je grupa, nech H je jej podgrupa indexu 2. Dokážte, že H je normálna podgrupa grupy $(G, \circ)$.

[3.6.2 a]
Permutáciu $\varphi = (123)(4561)(23456)(25)$ vyjadrite v tvare súčinu disjunktných cyklov, v tvare rozkladu na transpozície, určte jej rád a vypočítajte permutáciu φ^{57}.

[3.6.2 c]
Permutáciu $\varphi = (1234)(567)(1537)$ vyjadrite v tvare súčinu disjunktných cyklov, v tvare rozkladu na transpozície, určte jej rád a vypočítajte permutáciu φ^{-123}.

[3.6.2 d]
Permutáciu $\varphi = (1234567)(1234)(123)$ vyjadrite v tvare súčinu disjunktných cyklov, určte jej rád a vypočítajte permutáciu φ^{37}.

[3.6.7]
Dokážte, že parita súčinu cyklov je párna práve vtedy, keď sa medzi nimi nachádza párny počet cyklov párnej dĺžky.

[3.6.11]
Dokážte, že permutácia 6 prvkov má rád najviac 6.

[3.7.1.d]
Nájdite všetky normálne podgrupy grupy S_3.

[3.7.2.d]
Overte, či je $H = R \setminus \{0\}$ normálna podgrupa grupy $G = (C \setminus \{0\}, \cdot)$ a ak áno, zistite, či je faktorová grupa G/H izomorfná s $(\{c \in C; |c| = 1\}; \cdot)$.

[3.7.2.i]
Overte, či je $H = [(2, 2)]$ normálna podgrupa grupy $G = (Z_4 \times Z_6,\ \oplus)$ a ak áno, nájdite faktorovú grupu G/H.

[3.7.2 j]
Overte, či je $H = \{(2n, 3m, 0);\ n,\ m \in Z\}$ normálna podgrupa grupy $G = (Z \times Z \times Z,\ +)$ a ak áno, opíšte faktorovú grupu G/H.

[3.7.3]
Zistite, či sú množiny $M_1 = \{(x, y) \in R \times R;\ 2x - y + 4 = 0\}$, $M_2 = \{(x, y) \in R \times R;\ 4x - 2y + 1 = 0\}$ a $M_3 = \{(x, y) \in R \times\ R;\ x + 2y + 1 = 0\}$ triedami faktorovej grupy $R \times R/\{(a, 2a)\}$. Ak dve z nich sú takýmito triedami, nájdite ich súčet.

[3.7.4. a]

Zistite, či sú nasledujúce grupy izomorfné:

$$(R;+)/2\pi Z \quad a \quad (C \setminus \{0\},\cdot)/\{c \in C;\, |c| = 1\}$$

[3.7.4. c]
Zistite, či sú nasledujúce grupy izomorfné:

$$\frac{(R \setminus \{0\},\cdot)}{\{-1,1\}} \quad a \quad (R^+,\cdot)$$

[3.7.4. f]
Zistite, či sú nasledujúce grupy izomorfné:

$$(Z_{24},\oplus)/[4] \quad a \quad (Z_n,\oplus)$$

pre vhodné $n \in Z$ (ak áno, určte príslušné n.)

[3.7.4. h]
Zistite, či sú nasledujúce grupy izomorfné:

$$\frac{(Z \times Z,+)}{5Z \times Z} \quad a \quad (Z_5,\oplus)$$

[3.7.4 l]
Zistite, či sú nasledujúce grupy izomorfné:

$$(C \setminus \{0\},\cdot)/\{c \in C;\, c^3 = 1\} \quad a \quad (C \setminus \{0\},\cdot)$$

[3.7.7]
Nech $(G,\circ)$ je grupa. Položme $Z_G = \{z \in G;\, (\forall g \in G)\, g\circ z = z\circ g\}$ (množinu Z_G nazývame *centrum* grupy $(G,\circ)$. Dokážte, že Z_G je normálna podgrupa grupy $(G,\circ)$.

[3.7.8]
Nájdite všetky $24 \geq n > 0$, pre ktoré existuje netriválny homomorfizmus z grupy $(Z_{24},\oplus)$ do grupy $(Z_n,\oplus)$. Svoje tvrdenie dokážte! (Homomorfizmus φ je netriviálny, ak pre aspoň jeden prvok x z definičného oboru je $x\varphi \neq e$, kde e je neutrálny prvok v grupe, do ktorej pomocou φ zobrazujeme.)

[3.7.9]
Nájdite všetky homomorfizmy z grupy $(Z_{18},\oplus)$ do grupy $(Z_{24},\oplus)$. Svoje tvrdenie dokážte!

[4.3.13 b]
Zistite, či sú okruhy $Z_2 \times Z_3$ a Z_6 s bežnými operáciami izomorfné. Svoje tvrdenie dokážte!

[4.3.1]
Nech $\varphi : (Z, +, \cdot) \to (Z, +, \cdot)$ je zobrazenie definované predpisom:
$\varphi(x) = 2x$. Zistite, či je φ homomorfizmus (okruhov $(Z, +, \cdot)$ a $(Z, +, \cdot)$).

[4.3.1]
Dokážte, že surjektívny homomorfný obraz okruhu $(Z, +, \cdot)$ je (až na izomorfizmus) buď triviálny (t.j. jednoprvkový) okruh, alebo je to $(Z_n, \oplus, \odot)$ pre vhodné prir. číslo $n > 2$, alebo je to $(Z, +, \cdot)$.

[4.3.1]
Zistite, či sú polia $Q(\sqrt{2})$ a $Q(\sqrt{3})$ izomorfné. Svoje tvrdenie dokážte!

[4.4.6 b]
Nech D je pole, $\operatorname{char} D = p$. Nech $D^p = \{x \in D; (\exists y \in D)\, x = y^p\}$. Potom D^p je podpole poľa D. Dokážte!

[4.4.6 d]
Nech D je pole, $\operatorname{char} D = p$. Nech $D^p = \{x \in D; (\exists y \in D)\, x = y^p\}$. Potom ak D je konečné, tak $D^p = D$. Dokážte!

[4.5.5]
Zostrojte podielové pole k oboru integrity $(Z[\sqrt[3]{2}], +, \cdot)$. Zistite, či je toto podielové pole izomorfné s poľom $(Q(\sqrt[3]{2}), +, \cdot)$.

[4.6.9 b]
Dokážte, že každý homomorfný obraz poľa F je buď izomorfný s F, alebo je jednoprvkový.

[5.3.9]
Nájdite najväčší spoločný deliteľ polynómov $f(x) = x^{98} + 1$ a $g(x) = x^{162} + 1$ nad ľubovoľným poľom F.

[5.3.10 b]
Napíšte najväčší spoločný deliteľ polynómov $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$ a $g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$ nad poľom Q ako lineárnu kombináciu daných polynómov.

[5.3.10 c]
Napíšte najväčší spoločný deliteľ čísiel 2590 1078 ako lineárnu kombináciu daných čísiel s celočíselnými koeficientami.

[5.4.11]

Ukážte, že polynóm $x^4 + 2 \in Z_5[x]$ je ireducibilný nad poľom Z_5.

[5.4.12 b]
Nájdite rozklad polynómu $x^5 + 1 \in Z_5[x]$ nad Z_5 na ireducibilné polynómy.

[5.4.12 c]
Nájdite rozklad polynómu $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 \in Z_5[x]$ na ireducibilné polynómy nad Z_5.

[5.4.14]
Nájdite počet ireducibilných polynómov 2., 3. a 4. stupňa nad Z_2.

[5.5.1]
Ukážte, ž pre každé pole F $x - 1 | x^n - 1$ a $x^2 - 1 | x^{2n} - 1$ (delí v okruhu $F[x]$).

[5.5.2]
Ukážte, že $\quad x^2+x+1 \;\Big|\; x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ nad Q (pre všetky $m,\ n,\ p \geq 0$).

[5.5.8]
Nájdite rozklad polynómu $x^4 - 5x^2 + 6$ na ireducibilné polynómy nad Q a nad R.

[5.5.25]
Nájdite racionálne korene polynómu $\quad f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ a nájdite n.s.d $f(x)$ a $\quad g(x) = x^2 - 2x - 3$ nad Q.

[5.5.26]
Nájdite n.s.d. polynómov $x^{24} - 1$ a $x^9 - 1$ (sú to polynómy nad C). Dokážte, že množiny $H_1 = \{x \in C;\ x^{24} = 1\}$ a $H_2 = \{x \in C;\ x^9 = 1\}$ sú podgrupy grupy $(C \setminus \{0\}, \cdot)$. Nájdite $H_1 \cap H_2$.

[5.6.9]
Dokážte, že polynóm

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \in R[x]$$

má v C len jednoduché korene.

[5.6.10]
Dokážte, že $\quad (x-1)^2 \Big| (n-2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n-2m) \quad (n, m \geq 0,\ n \geq m)$

[5.6.11]
Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Dokážte, že

$$1 - \frac{x}{1!} + \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}.$$

[5.6.12 a]
Zistite, či má polynóm $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 \in Q[x]$ viacnásobné korene.

[5.6.12 b]
Zistite, či má polynóm $x^7 + x^4 + x^3 + x + 2 \in Z_3[x]$ viacnásobné korene.

[5.6.13]
Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte koeficienty Taylorovho rozvoja polynómu $f(x) = x^5 + 7x^3 - x + 2 \in Q[x]$ v bode $c = 2$ a zistite, či tento polynóm má racionálne viacnásobné korene.

[5.6.14 a]
Nájdite polynóm $f(x) \in Q(x)$ najnižšieho stupňa tak, aby

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 4,\ f(4) = 6.$$

[5.6.14 b]
Nájdite polynóm $f(x) \in Q(x)$ najnižšieho stupňa tak, aby zvyšok $f(x)$ pri delení polynómom $x-2$ bol 2 a zvyšok $f(x)$ pri delení polynómom x^2+x-7 bol $-x+1$.

[5.6.14 c]
Nájdite polynóm $f(x) \in Q(x)$ najnižšieho stupňa tak, aby zvyšok $f(x)$ pri delení polynómom $x - 3$ bol 14, zvyšok $f(x)$ pri delení polynómom x bol -4 a zvyšok $f(x)$ pri delení polynómom $x - 1$ bol 0.

[5.6.15]
Nech $f(x) \in Z[x]$ je polynóm s celočíselnými koeficientami. Nech $a, b \in Z$. Potom $(a - b) \mid (f(a) - f(b))$. Dokážte!

[6.1.7 a]
Nájdite všetky komplexné korene polynómu $f(x) = x^5 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

[6.3.4]
Nájdite všetky komplexné korene polynómu $f(x) = x^6 - 9x^3 + 8$.

[7.4.6]
Nech $n \geq 2$ je prirodzené číslo, nech p, q sú prvočísla, $p \neq q$. Dokážte, že $\sqrt[n]{pq}$ je iracionálne číslo!

[8.1.8 e]
Zistite, či je číslo $1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ algebraický prvok nad Q. Ak áno, nájdite jeho minimálny polynóm (nad Q).

[8.1.9 a]
Nech u je koreňom polynómu $x^3 + 4x^2 - 4x + 2$ (je to ireducibilný polynóm nad Q). Nájdite minimálny polynóm prvku u^2 nad Q.

[8.1.9 b]
Nech u je koreňom polynómu $x^3 + 4x^2 - 4x + 2$ (je to ireducibilný polynóm nad Q). Nájdite minimálny polynóm prvku u^3 nad Q.

[8.1.9 c]
Nech u je koreňom polynómu $x^3 + 4x^2 - 4x + 2$ (je to ireducibilný polynóm nad Q). Nájdite minimálny polynóm prvku $\frac{1}{u}$ nad Q.

[8.1.10]
Nech $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ je minimálny polynóm prvku $u \neq 0$ algebraického nad poľom F. Zistite, či je $1/u$ tiež algebraický prvok nad F a ak je, nájdite jeho minimálny polynóm. (Svoje tvrdenie dokážte!)

[8.1.11]
Nájdite $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$ v poli $Q(\sqrt[3]{2})$. (prvky algebraického rozšírenia $Q(\sqrt[3]{2})$ sú "akési polynómy")

[8.2.3 e]
Určte stupeň viacnásobného rozšírenia $Q(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{24})$ nad Q a nájdite (nejakú) jeho bázu.

[8.2.3 g]
Určte stupeň viacnásobného rozšírenia $Q(1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{8})$ nad Q a nájdite (nejakú) jeho bázu.

[8.2.3 h]
Určte stupeň viacnásobného rozšírenia $Q(1+\sqrt[3]{3}, \sqrt{12})$ nad Q a nájdite (nejakú) jeho bázu.

[8.2.4]
Nech pole L je rozšírenie poľa F. Dokážte, že ak $[L : F]$ je prvočíslo, tak pre každý prvok $u \in L$ platí $F(u) = L$, alebo $u \in F$.

[8.2.4a]
Nech pole L je rozšírenie poľa F, $u \in L$. Dokážte, že ak $[F(u) : F] = 5$, tak $[F(u^2) : F] = 5$.

[8.2.6 a]
Nech F je pole, nech a, b sú algebraické prvky nad F. Potom $a+b$ je algebraický prvok nad F. Dokážte!

[8.2.6 aa]

Nech F je pole, nech a, b sú algebraické prvky nad F, $b \neq 0$. Potom a/b je algebraický prvok nad F. Dokážte!

[8.3.1 c]
Určte stupeň rozšírenia nad Q a nádite bázu rozkladového poľa nad Q pre polynóm $f(x) = x^4 - 9$.

[8.3.1 g]
Určite stupeň rozšírenia nad Q a nájdite bázu rozkladového poľa nad Q pre polynóm $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$.

[8.3.5 d]
Nech p je prvočíslo. Dokážte, že, ak $m \Big| n$ tak $p^m - 1 \Big| p^n - 1$ a tiež že $x^{p^m} - x \Big| x^{p^n} - x$.

[FS596]
Nájdite všetky $m \in \{1, 2, \ldots\}$, pre ktoré $x^2 + x + 1$ delí $x^{2m} + x^m + 1$ v okruhu $R[x]$.

[I.1]
Sú grupy $(Z_{10}; \oplus)$ a $(Z_{11} \setminus \{0\}, \odot)$ izomorfné? Svoje tvrdenie dokážte!

[O.1]
Nech $I_1,\ I_2$ sú ideály okruhu $(R, +, \cdot)$. Dokážte, že $I_1 + I_2 = \{a + b;\ a \in I_1\ \&\ b \in I_2\}$ je ideál okruhu R. Nech $I_1 = \{12k; k \in Z\}$, nech $I_2 = \{18k; k \in Z\}$. Dokážte, že sú to ideály v $(Z, +, \cdot)$ a nájdite $I_1 + I_2$ a $I_1 \cap I_2$.

[O.2]
Nech $2Z$ je množina párnych čísiel. Potom $(2Z, +, \cdot)$ (obvyklé násobenie a sčítanie) je komutatívny okruh. Ktorý z faktorových okruhov $(2Z, +, \cdot)/\{6k;\ k \in Z\}$ a $(2Z, +, \cdot)/\{4k;\ k \in Z\}$ je pole? Svoje tvrdenia dokážte!

[P.1]
Nech $a \in Q$ je také, že $\sqrt[3]{a} \notin Q$. Vypočítajte $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+1}$ v poli $Q(\sqrt[3]{a})$.

[P.2]
Nech $a \in Q$. Vypočítajte $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+a}$ v poli $Q(\sqrt[3]{2})$.

[P.3]
Nech $a \in Q$. Vypočítajte $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+a}$ v poli $Q(\sqrt[3]{2})$.

[P.4]
Zistite, či je polynóm $x^3 - 148$ ireducibilný nad Q.