

JÚLIUS KORBAŠ

Prednášky z lineárnej algebry a geometrie

Pôvodne zapísal a v editore $\text{\LaTeX}$

spracoval ŠTEFAN GYÜRKI



Univerzita
Komenského
v Bratislave

JÚLIUS KORBAŠ

Prednášky z lineárnej algebry a geometrie

Pôvodne zapísal a v editore $\text{\LaTeX}$

spracoval ŠTEFAN GYÜRKI

2013

Univerzita Komenského v Bratislave

Obsah

Úvod	7
I. PRÍPRAVNÉ POJMY, GRUPY	9
Zobrazenia medzi množinami	9
Binárne operácie	10
Definícia grupy, základné pravidlá rátania	11
Podgrupy	12
Homomorfizmy grúp	13
Relácie ekvivalencie, faktorové grupy abelovských grúp ..	14
II. OKRUHY, TELESÁ, POLIA	17
Definícia okruhu	17
Pojem telesa a poľa	17
Základné pravidlá rátania v okruhoch	17
Ktoré z okruhov $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sú polia?	18
III. VEKTOROVÉ PRIESTORY	19
Pojem vektorového priestoru, základné pravidlá rátania .	19
Vektorové podpriestory	19
Najmenší podpriestor, obsahujúci danú množinu	20
Lineárne kombinácie vektorov, lineárny obal	21
IV. SYSTÉMY LINEÁRNYCH ROVNÍC 1	23
Základné pojmy teórie systémov lineárnych rovníc	23
Gaussova eliminačná metóda	23
V. LINEÁRNA (NE)ZÁVISLOSŤ VEKTOROV	26
Pojem a kritériá lineárnej (ne)závislosti vektorov	26
Lineárne nezávislé a generujúce vektory, Steinitzova veta	27
Báza, dimenzia, súradnice vektora	28
VI. SÚČTY VEKTOROVÝCH PODPRIESTOROV ...	31
Pojem lineárneho súčtu vektorových podpriestorov	31
Dimenzia lineárneho súčtu	31
Priamy súčet vektorových podpriestorov	32
VII. MATICE	33
Definícia matice, vektorový priestor matíc	33
Riadková ekvivalencia matíc, stupňovitý tvar, hodnosť ..	34
VIII. LINEÁRNE ZOBRAZENIA	38
Pojem lineárneho zobrazenia, lineárny izomorfizmus	38
Faktorové vektorové priestory	39

Základná veta o lineárnych zobrazeniach	40
Lineárne zobrazenie $R^k \rightarrow R^s$, jeho matica	41
Súčin matíc, súvislosť so skladaním lineárnych zobrazení	41
Niektoré vlastnosti súčinu matíc	42
Vzťah súčinu matíc a elementárnych riadkových operácií	42
Injektívnosť a surjektívnosť lineárnych zobrazení	43
Regulárna lineárna transformácia R^k , inverzná matica ..	45
Výpočet inverznej matice	46
IX. SYSTÉMY LINEÁRNYCH ROVNÍČ 2	47
Maticový zápis systému lineárnych rovníc	47
Homogénne systémy - vlastnosti množiny riešení	48
Nehomogénne systémy - vlastnosti množiny riešení	49
Determinanty	50
Vyjadrenie inverznej matice pomocou determinantu	57
Fredholmova alternatíva	57
Ako vyriešiť lineárny systém pomocou determinantov ...	58
X. EUKLIDOVSKÉ VEKTOROVÉ PRIESTORY	59
Skalárny súčin a euklidovský vektorový priestor	59
Dĺžka vektora, jej vlastnosti	60
Uhol dvoch vektorov, kolmosť (ortogonalnosť)	60
Ortogonálne bázy, Gramova-Schmidtova ortogonalizácia .	61
Ortogonálny doplnok podmnožiny	63
Ortogonálna projekcia do podpriestoru	65
Euklidovský izomorfizmus, ortogonálna grupa matíc	65
XI. (REÁLNE) AFINNÉ PRIESTORY	67
Pojem afinného priestoru, základné pravidlá rátania	67
Afinné podpriestory	69
Afinný súradnicový systém	70
Priradenie súradníc bodom, resp. vektorom	70
Afinné zobrazenia, afinný izomorfizmus	70
Barycentrický versus afinný súradnicový systém	72
Afinné zobrazenie zachováva barycentrické kombinácie ..	73
Základná veta o afinných zobrazeniach	73
Vzťah barycentrických súradníc a ťažiska, simplexy	74
Parametrické vyjadrenie afinného podpriestoru	74
Všeobecné (analytické) vyjadrenie afinného podpriestoru	75
Vzájomné polohy afinných podpriestorov	77
Zmena súradníc pri zmene súradnicového systému	78
Zmena súradníc vo vektorovom priestore	79
Zmena súradníc v afinnom priestore	79
Orientácia reálneho vektorového, resp. afinného priestoru	80
XII. AFINNO-EUKLIDOVSKÉ PRIESTORY (AEP) ..	82
Pojem AEP, vzdialenosť bodov a priestor $\mathbb{E}^n$	82
Kolmosť vektora na afinný podpriestor	83
Kolmosť afinných podpriestorov	83
Kolmopremietací podpriestor, kolmý priemet bodu	84
Vzdialenosť afinných podpriestorov	86
Vzdialenosť rovnobežných afinných podpriestorov	86

Vzdialenosť rovnobežných nadrovín	87
Vzdialenosť mimobežných afinných podpriestorov	87
Uhly medzi afinnými podpriestormi v $\mathbb{E}^n$	88
Vektorový súčin v $\mathbb{R}^3$	89
Zmiešaný súčin v $\mathbb{R}^3$	91
XIII. LINEÁRNE TRANSFORMÁCIE PRIESTOROV	93
Matica lineárnej transformácie vzhľadom na danú bázu ..	93
Podobnosť matíc	94
Vlastné hodnoty a vlastné vektory	95
Charakteristický polynóm	97
Podobnosť matice diagonálnej matici	99
Niektoré vlastnosti polynómov	101
Príprava na teóriu Jordanovho tvaru matice	102
Jordanov normálny tvar matice (lineárnej transformácie)	104
XIV. KVADRATICKÉ FORMY	108
Pojem kvadratickej formy a jej matice	108
Zámena premenných a kongruencia matíc	109
Kanonický tvar kvadratickej formy	109
Kladná definitnosť	112
XV. BILINEÁRNE FORMY	
A KVADRATICKÉ FUNKCIE	115
Homogénne bilinéarne formy	115
Homogénne kvadratické funkcie	115
XVI. EUKLIDOVSKÁ TEÓRIA KVADRATICKÝCH	
FORIEM A KRIVKY 2. RÁDU	117
Veta o hlavných osiach	117
Použitie vety o hlavných osiach, krivky 2. rádu	119
Invarianty krivky 2. rádu	121
XVII. DUÁLNY PRIESTOR, TENZOROVÝ SÚČIN ..	123
Vektorový priestor lineárnych zobrazení	123
Duálny vektorový priestor a duálne lineárne zobrazenie .	124
Tenzorový súčin vektorových priestorov	127
Tenzory typu (p, q)	129
Použitá a odporúčaná literatúra	130

Úvod

Niekedy v roku 2002, v čase, keď už mal knihu Lineárna algebra a geometria I (LAG I) takmer hotovú, Július Korbaš dostal od vtedajšieho študenta Štefana Gyürkiho pomocou editora TeX zapísané poznámky zo svojich prednášok Lineárna algebra a geometria (1) a (2). Na realizovanie Gyürkiho úmyslu, aby sa tieto poznámky využili pri práci na knihe LAG I, bolo vtedy už neskoro.

Knihu LAG I Korbaš chápal a chápe ako prvý diel dvojdielnej učebnice lineárnej algebry a analytickej geometrie. Pre viaceré príčiny (o. i., pre tvrdé limity, stanovené pedagogickými, vedeckými a administratívno-organizačnými povinnosťami) však zatiaľ plánovaný druhý diel (LAG II) nedokončil. Ale v priebehu roka 2012 sa mu konečne podarilo podrobne prezrieť Gyürkiho zápisky, opraviť ich, vniesť do nich niektoré „kozmetické“ úpravy (týkajúce sa tak obsahu, ako aj použitia editora TeX), a tak vznikol predkladaný text. Je dokladom toho, že Gyürkiho úsilie napokon prinieslo svoje ovocie.

Kapitoly I – X tohto textu pokrývajú, aj keď, samozrejme, v inom spracovaní, približne materiál knihy LAG I, prednášaný na FMFI UK študentom matematiky a niektorých iných zameraní v zimnom semestri prvého ročníka. Kapitoly XI – XVII pokrývajú zasa materiál, prednášaný v letnom semestri prvého ročníka. Veríme, že čitateľom (najmä tým, ktorí poznajú LAG I; nemusia to byť výlučne študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave) posledne spomenuté kapitoly poslúžia ako povestný „vrabec v hrsti“, ktorý je lepší ako „holub na streche“, majúci tentoraz podobu stále ešte nedokončenej knihy LAG II. Ale keďže prvé vydanie LAG I je už niekoľko rokov vypredané, dúfame, že aj kapitoly I – X môžu byť pre niekoho takým „vrabcom v hrsti“, lepším ako zatiaľ neexistujúce druhé vydanie.

Autori srdečne ďakujú recenzentom Jurajovi Činčurovi a Michalovi Zajacovi, ktorí svojimi radami a konštruktívnymi pripomienkami prispeli k zlepšeniu textu. Vďaka patrí aj pracovníkom Vydavateľstva Univerzity Komenského za spoluprácu pri riešení všetkých otázok.

V Bratislave, máj 2013

Július Korbaš a Štefan Gyürki

I. PRÍPRAVNÉ POJMY, GRUPY

Zobrazenia medzi množinami

Označenie. Niektoré často používané množiny: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ prirodzené čísla, $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ celé čísla, $\mathbb{Q}$ racionálne čísla, $\mathbb{R}$ reálne čísla, $\mathbb{C}$ komplexné čísla, $\emptyset$ prázdna množina.

Definícia 1.1. Nech A a B sú množiny. *Zobrazenie* z A do B je predpis, ktorý každému prvku z A priradí práve jeden prvok z B . Ak tento predpis označíme f , tak hovoríme o zobrazení $f : A \rightarrow B$. Zápis $f(a) = b$ znamená, že sme priradili prvku $a \in A$ prvok $b \in B$; píše sa tiež $f : a \mapsto b$; a sa nazýva *vzor* prvku b ; o b hovoríme ako o *obraz* prvku a ; $f(A) = \text{obraz}$ zobrazenia f ; označuje sa aj $\text{Im}(f)$; máme $f(A) = \text{Im}(f) = \{y \in B; \exists x \in A : f(x) = y\}$.

Príklady. Zobrazenie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 1$, každé prirodzené číslo zmenší o 1. Pre každú množinu A máme *identické zobrazenie* $\text{id}_A : A \rightarrow A$, $\text{id}_A(x) = x$, ktoré každému prvku $x \in A$ priradí ten istý (teda identický) prvok x .

Definícia 1.2. Zobrazenia $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow B$ sa rovnajú ($f = g$), ak $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$.

Príklad. Pre $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = |2x|$, $g(x) = 2x$, máme, samozrejme, $f = g$.

Definícia 1.3. Nech $f : A \rightarrow B$ je zobrazenie a nech $A' \subset A$. Predpis, ktorý každému $a \in A'$ priradí $f(a)$, definuje zobrazenie, ktoré sa nazýva *zúženie* zobrazenia f na podmnožinu A' ; je to zobrazenie $f|_{A'} : A' \rightarrow B$, $f|_{A'}(x) = f(x)$.

Definícia 1.4. Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ sa nazýva *surjektívne* (*surjekcia*), ak $f(A) = B$. Vtedy tiež hovoríme, že f je zobrazenie množiny A na množinu B .

Poznámka. Presvedčte sa, že zobrazenie $f : A \rightarrow B$ je surjektívne práve vtedy, keď pre každé $y \in B$ existuje také $x \in A$, že $f(x) = y$.

Definícia 1.5. Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ sa nazýva *injektívne* (*injekcia* množiny A do množiny B), ak z toho, že $f(a) = f(a')$ vyplýva, že $a = a'$.

Definícia 1.6. Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ sa nazýva *bijektívne* (*bijekcia* množiny A na množinu B), ak je surjektívne aj injektívne.

Príklad. Zobrazenie $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 3x$, je bijektívne.

Definícia 1.7. Nech $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ sú zobrazenia. Predpis $x \mapsto g(f(x))$ definuje zobrazenie $A \rightarrow C$; označíme ho $g \circ f : A \rightarrow C$. Máme $g \circ f(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$. Zobrazenie $g \circ f : A \rightarrow C$ sa nazýva zobrazenie *zložené* z f a g alebo *kompozícia* zobrazení f a g .

Príklad. Nech $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 3x$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Potom $f \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \circ h(x) = 3x + 2$.

Veta 1.1. 1. Ak $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ sú injekcie, tak aj $g \circ f : A \rightarrow C$ je injekcia.

2. Ak $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ sú surjekcie, tak aj $g \circ f : A \rightarrow C$ je surjekcia.

Dôkaz. 1. Predpokladajme, že $g \circ f(a) = g \circ f(a')$. Chceme ukázať, že $a = a'$. Máme $g(f(a)) = g(f(a'))$; keďže g je injektívne, z toho: $f(a) = f(a')$. Ale aj f je injektívne, a preto $a = a'$.

2. Nech $z \in C$. Keďže g je surjektívne, existuje $b \in B$: $g(b) = z$. Keďže f je surjekcia, existuje $a \in A$: $f(a) = b$. Potom $z = g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a)$. $\square$

Veta 1.2. Nech $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ sú zobrazenia. Potom $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Terminológia. Tejto vlastnosti sa hovorí *asociatívnosť skladania zobrazení*.

Dôkaz. Ľavá strana je $h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$; pravá strana je $(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$, $\forall x \in A$. $\square$

Veta 1.3; definícia 1.8. Nech $f : A \rightarrow B$ je bijekcia. Potom existuje zobrazenie $B \rightarrow A$, ktoré každému prvku $b \in B$ priradí ten jediný prvok $a \in A$, pre ktorý $f(a) = b$; označíme ho $f^{-1} : B \rightarrow A$. Teda $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$. Zobrazenie $f^{-1} : B \rightarrow A$ je tiež bijektívne a máme $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$, $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$. Zobrazenie $f^{-1} : B \rightarrow A$ sa nazýva *inverzné zobrazenie* k zobrazeniu $f : A \rightarrow B$.

Dôkaz. f^{-1} je injekcia: nech $a = f^{-1}(b) = f^{-1}(b')$. Z toho vyplýva, že $f(a) = b$ a $f(a) = b'$, teda $b = b'$.

f^{-1} je surjekcia: pre ľubovoľné $a \in A$, $f^{-1}(f(a)) = a$. Záver: f^{-1} je bijekcia. $\square$

Veta 1.4. Ak $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ sú také zobrazenia, že $g \circ f = \text{id}_A$, tak f je injekcia a g je surjekcia.

Dôkaz. f je injekcia: nech $f(a) = f(a')$. Potom $g(f(a)) = (g \circ f)(a) = \text{id}_A(a) = a = g(f(a')) = (g \circ f)(a') = \text{id}_A(a') = a'$.

g je surjekcia: pre ľubovoľné $a \in A$ máme $f(a) \in B$, $a = g(f(a))$, teda $f(a)$ je vzor prvku a pri zobrazení g . $\square$

Veta 1.5. Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ je bijektívne $\Leftrightarrow$ existuje $g : B \rightarrow A$ také, že $g \circ f = \text{id}_A$ a $f \circ g = \text{id}_B$.

Dôkaz. $\Rightarrow$: Predpokladajme, že zobrazenie f je bijektívne. Potom vieme, že $\exists f^{-1} : B \rightarrow A$ s tým, že $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$, $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$.

$\Leftarrow$: Predpokladajme, že $\exists g : B \rightarrow A$: $g \circ f = \text{id}_A$ a $f \circ g = \text{id}_B$. Z vety 1.4 dostávame, že f je injektívne aj surjektívne, teda bijektívne. $\square$

Binárne operácie

Definícia 1.9. Binárnou operáciou na množine $M \neq \emptyset$ rozumieme zobrazenie $M \times M \rightarrow M$. Binárne operácie označujeme rôznymi symbolmi: $\cdot, +, *, \bullet$ a pod. Obraz dvojice $(a, b) \in M \times M$ (napríklad) pri zobrazení $+$ označujeme obyčajne $a + b$ (teda namiesto $+(a, b)$ píšeme $a + b$).

Definícia 1.10. Nech $*$: $M \times M \rightarrow M$ je binárna operácia na M . Prvok $e \in M$ taký, že $m * e = m = e * m$ pre všetky $m \in M$ sa volá *neutrálny prvok* operácie $*$.

Poznámka. Binárna operácia nemusí mať neutrálny prvok. Príklad: $\mathbb{N}$ so zvyčajným sčítaním.

X. EUKLIDOVSKÉ VEKTOROVÉ PRIESTORY

Skalárny súčin a euklidovský vektorový priestor

Definícia 10.1. Nech V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$. Potom skalárny súčin na V je zobrazenie $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, pre ktoré sú splnené tieto podmienky:

1. $g(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = g(\vec{x}, \vec{z}) + g(\vec{y}, \vec{z}), \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$;
2. $g(\vec{y}, \vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$;
3. $g(\alpha \vec{x}, \vec{y}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$;
4. Ak $\vec{x} \neq \vec{0}$, tak $g(\vec{x}, \vec{x}) > 0$.

Ak g je nejaký skalárny súčin na V , tak V sa nazýva *euklidovský* vektorový priestor (presnejšie je to euklidovský vektorový priestor (V, g)); $g(\vec{x}, \vec{y})$ je skalárny súčin vektorov $\vec{x}$ a $\vec{y}$ (čítame aj „ $\vec{x}$ skalárne krát $\vec{y}$ “).

Uvedomme si, že podmienky 1 a 3 v definícii znamenajú, že skalárny súčin je lineárny v prvom argumente. Podmienky 1, 2 a 3 dovedna znamenajú, že skalárny súčin je lineárny nielen v prvom, ale aj v druhom argumente.

Ak g je skalárny súčin na V , tak namiesto $g(\vec{x}, \vec{y})$ sa často píše $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$; príslušné zobrazenie dvoch premenných je $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Potom vlastnosti skalárneho súčinu sa prepíšu takto:

1. $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$;
2. $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$;
3. $\langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$;
4. ak $\vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$, tak $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$.

Príklad. Majme zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

1. $\langle (\vec{x} + \vec{z}), \vec{y} \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n) + (z_1, \dots, z_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \langle (x_1 + z_1, \dots, x_n + z_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = (x_1 + z_1)y_1 + \dots + (x_n + z_n)y_n = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle + \langle (z_1, \dots, z_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle$;

2. $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \langle (y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$;

3. $\langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \alpha(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \langle (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \alpha x_1 y_1 + \dots + \alpha x_n y_n = \alpha(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$;

4. ak $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$, tak existuje také i , že $x_i \neq 0$, a preto $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq x_i^2 > 0$.

Overili sme, že uvažované zobrazenie má všetky vlastnosti skalárneho súčinu, teda je skalárnym súčinom na $\mathbb{R}^n$. Nazýva sa *štandardný skalárny súčin*. Na $\mathbb{R}^n$ existujú aj iné skalárne súčiny.

Príklad. Euklidovský vektorový priestor (= vektorový priestor so skalárnym súčinom) nemusí byť konečne generovaný. Zoberme napr. $V = C(\langle 0, 1 \rangle)$ = priestor

spojitých reálnych funkcií na $\langle 0, 1 \rangle$. Definujme zobrazenie: $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ takto: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$; $(C\langle 0, 1 \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor, ale nie konečne generovaný.

Poznámka. Nech V je vektorový priestor nad $\mathbb{C}$. Skalárny súčin na V je zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, ktoré spĺňa:

1. $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$;
2. $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}$ (pripomeňme si, že $\overline{a + ib} = a - ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$);
3. $\langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$;
4. ak $\vec{x} \in V - \{\vec{0}\}$, tak $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$.

Ak V je vektorový priestor nad $\mathbb{C}$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ je skalárny súčin, tak $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sa volá *unitárny* (alebo *hermitovský*) vektorový priestor.

Príklad. Skalárny súčin na komplexnom vektorovom priestore je napr. zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$.

Dĺžka vektora, jej vlastnosti

Ďalej už uvažujeme iba o reálnych euklidovských vektorových priestoroch.

Definícia 10.2. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Potom *dĺžka* ($=$ *veľkosť*, *norma*) vektora $\vec{x} \in V$ sa definuje ako reálne číslo $|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$.

Príklad. V $\mathbb{R}^3$ so štandardným skalárnym súčinom: $|(1, 1, 1)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Veta 10.1. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Potom

1. $|\alpha \vec{x}| = |\alpha| \cdot |\vec{x}|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in V$;
2. $|\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
3. $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ (*Buňakovského - Cauchyho - Schwarzova nerovnosť*);
4. $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ (*trojuholníková nerovnosť*).

Dôkaz. 1. $|\alpha \vec{x}| = \sqrt{\langle \alpha \vec{x}, \alpha \vec{x} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = |\alpha| |\vec{x}|$.

2. Ak $\vec{x} = \vec{0}$, tak $|\vec{x}| = |\vec{0}| = 0 \cdot |\vec{x}| = 0$; ak $\vec{x} \neq \vec{0}$, tak máme $|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} > 0$ (a teda $\neq 0$).

3. Ak $\vec{x} = \vec{0}$, všetko je jasné. Pre ľubovoľné pevne zvolené $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ uvažujme o $\alpha \vec{x} - \vec{y}$. Máme $\langle \alpha \vec{x} - \vec{y}, \alpha \vec{x} - \vec{y} \rangle \geq 0$; teda $\langle \alpha \vec{x}, \alpha \vec{x} \rangle - \langle \vec{y}, \alpha \vec{x} \rangle - \langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \alpha^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \alpha \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle - \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \alpha^2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2\alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \geq 0$.

Zistili sme, že pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \alpha^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \alpha + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \geq 0$; graf kvadratického trojčlena $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \alpha^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \alpha + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$ (v premennej α) leží v nezápornej polrovine ($x_2 \geq 0$) roviny $O\alpha x_2$, nepretína os α , ale sa jej nanajvýš dotýka. Teda tento trojčlen nemá dva rôzne reálne korene, diskriminant $D = 4\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 - 4\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \leq 0$, z čoho $4 \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq 4\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$, teda $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq |\vec{x}| \cdot |\vec{y}|$.

4. $|\vec{x} + \vec{y}|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}|^2 + 2|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| + |\vec{y}|^2 = (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$, a preto $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$. $\square$

Uhol dvoch vektorov, kolmosť (ortogonalnosť)

Z časti 3 vety 10.1 vieme, že ak $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$, tak $-1 \leq \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \leq 1$. To umožňuje prijať nasledujúcu definíciu.

Definícia 10.3. Ak $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor a $\vec{x}, \vec{y} \in V$ sú nenulové, tak *uhol vektorov* $\vec{x}, \vec{y}$ definujeme ako také číslo $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$, pre ktoré $\cos \alpha = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$. Ak $\vec{x} = \vec{0}$ alebo $\vec{y} = \vec{0}$, tak definujeme *uhol vektorov* $\vec{x}, \vec{y}$ ako $\frac{\pi}{2}$. Uhol vektorov $\vec{x}, \vec{y}$ označujeme aj $\angle \vec{x}, \vec{y}$.

Poznámka. Zrejme $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos(\angle \vec{x}, \vec{y})$ pre všetky $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

Definícia 10.4. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Hovoríme, že $\vec{x}, \vec{y} \in V$ sú na seba *kolmé* (sú *ortogonálne*), ak $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2}$; vtedy píšeme stručne $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Veta 10.2. Ak $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor, tak $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

Dôkaz. $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ alebo $\vec{y} = \vec{0}$, alebo $\vec{x}, \vec{y} \in V - \vec{0}$ a $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. $\square$

Príklady. 1. Nech $\mathbb{R}^3$ je euklidovský vektorový priestor so štandardným skalárnym súčinom. Potom $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ sú navzájom ortogonálne.

2. V $\mathbb{R}^2$ so štandardným skalárnym súčinom, na (a, b) je kolmý napr. vektor $(-b, a)$.

Veta 10.3. Nech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor, nech $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ sú nenulové a navzájom kolmé. Potom sú aj lineárne nezávislé.

Dôkaz. Nech $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$. Chceme ukázať, že $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Je to tak, lebo:

$$\langle \vec{a}_1, \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n \rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle}_{>0} + \alpha_2 \underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_n \rangle}_{=0} = 0 = \langle \vec{a}_1, \vec{0} \rangle,$$

a teda $\alpha_1 = 0$. Podobne všeobecne $0 = \langle \alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n, \vec{a}_i \rangle = \alpha_i |\vec{a}_i|^2$, z čoho vyplýva, že $\alpha_i = 0$. $\square$

Dôsledok. Ak $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je n -rozmerný euklidovský vektorový priestor a vektory $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V - \{\vec{0}\}$ sú navzájom kolmé, tak $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza priestoru V .

Ortogonálne bázy, Gramova-Schmidtova ortogonalizácia

Definícia 10.5. Ak $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báza euklidovského vektorového priestoru V taká, že $\vec{a}_i \perp \vec{a}_j$ pre $\forall i \neq j$, tak táto báza sa nazýva *ortogonálna báza*. Ak navyše $|\vec{a}_i| = 1$ pre $i = 1, \dots, n$, tak hovoríme, že táto báza je *ortonormálna* (alebo *ortonormovaná*).

Poznámka. Pri práci s ortonormálnymi bázami (ale aj pri iných príležitostiach) sa často (na skracovanie zápisu) používa *Kroneckerov symbol delta*, čo je funkcia δ_{ij} dvoch celočíselných argumentov i a j , definovaná podmienkou

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } i = j \\ 0, & \text{ak } i \neq j. \end{cases}$$

Napríklad to, že báza $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ euklidovského vektorového priestoru $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je ortonormálna, pomocou Kroneckerovho symbolu delta stručne zapíšeme takto:

$$\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Príklad. $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ je ortonormálna báza euklidovského vektorového priestoru $\mathbb{R}^3$ so štandardným skalárnym súčinom.

XI. (REÁLNE) AFINNÉ PRIESTORY

Pojem afinného priestoru, základné pravidlá rátania

Prvá časť názvu „afinný priestor“ (o chvíľu ho definujeme) pochádza zo slova afinita, čo znamená spriaznenosť. Z definície bude jasné, o akú spriaznenosť ide.

Definícia 11.1. Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$, kde $\mathcal{B} \neq \emptyset$ je množina, ktorej prvky budeme zvyčajne označovať $A, B, \dots$ a budeme ich nazývať *body*, a V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$; jeho prvky sú *vektory*, označujeme ich symbolmi so šípkou. $\mathcal{A}$ sa nazýva *afinný priestor*, ak body z $\mathcal{B}$ a vektory z V sú „spriaznené“ podľa nasledujúcich pravidiel (axióm afinného priestoru):

- 1° pre každú usporiadanú dvojicu $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ existuje jediný vektor z V , ktorý potom označíme $\overrightarrow{XY}$; nazýva sa *vektor patriaci k dvojici* $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$;
- 2° pre každý $X \in \mathcal{B}$ a každý $\vec{x} \in V$ existuje jediný bod $Y \in \mathcal{B}$ taký, že $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$;
- 3° pre každú usporiadanú trojicu $(X, Y, Z) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Ak $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor a $\dim(V) = n$, tak hovoríme, že $\dim(\mathcal{A}) = n$. Ináč: $\mathcal{A}$ je n -rozmerný afinný priestor. $\mathcal{B}$ je *bodová zložka*, V je *vektorová zložka* alebo *smer* (smerový priestor) afinného priestoru $\mathcal{A}$.

Príklady. 1. Nech $\mathcal{B}$ je jednoprvková množina $\{B\}$, $V = \{\vec{0}\} = \{\overrightarrow{BB}\}$. $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je nulorozmerný afinný priestor.

2. Nech $\mathcal{B}$ je množina bodov „školskej roviny“ Oxy , nech V je vektorový priestor orientovaných úsečiek so začiatkom v O . Dvojici $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ priradíme jediný vektor $\vec{x} \in V$, ktorý dostaneme tak, že orientovanú úsečku $\overrightarrow{XY}$ rovnobežne posunieme do bodu O tak, že X prejde do O . Axiómy afinného priestoru sa ľahko overia.

3. Nech $\mathcal{B} = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^n$. 1°: Usporiadanej dvojici $(A, B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, kde $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ priradíme vektor $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$. 2°: Pre ľubovoľný bod $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{B}$ a ľubovoľný $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in V$ je $Y = (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n) \in \mathcal{B}$ ten jediný bod, pre ktorý máme $\vec{a} = \overrightarrow{XY}$. 3°: $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $Z = (z_1, \dots, z_n)$; $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n) + (z_1 - y_1, \dots, z_n - y_n) = (z_1 - x_1, \dots, z_n - x_n) = \overrightarrow{XZ}$. Teda $\mathcal{A} = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ je n -rozmerný afinný priestor.

4. Nech

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n &= b_s \end{cases} \quad (N)$$

je riešiteľný nehomogénny systém lineárnych rovníc nad $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ = množina všetkých riešení systému (N). V = vektorový priestor všetkých riešení príslušného homogén-

neho systému. 1°: pre $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ definujeme $\overrightarrow{XY} = Y - X \in V$; je to riešenie príslušného homogénneho systému. 2°: pre ľubovoľné $A \in \mathcal{B}$, $\vec{a} \in V$ bude bod $A + \vec{a} = B \in \mathcal{B}$ jediný taký, že $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. 3°: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = Y - X + Z - Y = Z - X = \overrightarrow{XZ}$. Teda $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor; $\dim(\mathcal{A}) = n - h(\text{matica systému}(N))$.

5. Nech

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n &= 0 \end{cases} \quad (H)$$

je homogénny systém lineárnych rovníc nad $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ = množina všetkých riešení systému (H). V = vektorový priestor všetkých riešení systému (H). Ako z dvojice $(\mathcal{B}, V)$ urobíte afinný priestor? [Skúste sa na vec pozrieť takto: v prvej časti, pri prvom kontakte so všeobecnými lineárnymi systémami, bolo asi rozumné striktné rozlišovať medzi homogénnymi a nehomogénnymi lineárnymi systémami, hoci aj tam sme si už napr. uvedomili, že známa nutná a postačujúca podmienka riešiteľnosti (Capelliho - Frobeniova - Kroneckerova veta) „funguje“ rovnako dobre pre nehomogénne ako pre homogénne priestory. Možno ste si tiež uvedomili, že veta o štruktúre množiny riešení riešiteľného nehomogénneho systému („množina riešení = nejaké jedno riešenie daného systému plus všetky možné riešenia príslušného homogénneho systému“) sa dá podobne povedať aj o množine všetkých riešení homogénneho systému. Môžeme teda predchádzajúci príklad vlastne preformulovať tak, že v ňom (N) nebude nevyhnutne iba riešiteľný nehomogénny systém lineárnych rovníc, ale jednoducho hocijaký riešiteľný lineárny systém (a teda prípadne aj homogénny lineárny systém)?]

Veta 11.1. Nech $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V)$ je afinný priestor. Potom

1. $\overrightarrow{XX} = \vec{0} \in V$, $\forall X \in \mathcal{B}$, a ak $\overrightarrow{XY} = \vec{0}$, tak $X = Y$;
2. ak $\overrightarrow{XY} = \vec{ST}$, tak $\overrightarrow{XS} = \vec{YT}$;
3. $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$, $\forall X, Y \in \mathcal{B}$.

Dôkaz. 1. Máme $\overrightarrow{XX} + \overrightarrow{XX} = \overrightarrow{XX}$, preto $\overrightarrow{XX} = \vec{0}$. Druhá časť: z definície 11.1, 2°.

2. Predpokladajme, že $\overrightarrow{XY} = \vec{ST}$. Potom $\overrightarrow{XS} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YS} = \vec{ST} + \overrightarrow{YS} = \overrightarrow{YS} + \vec{ST} = \vec{YT}$.

3. $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XX} = \vec{0}$. Preto $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$. □

Iná definícia afinného priestoru:

Definícia 11.1*. Afinným priestorom rozumieme trojicu $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, V, +)$, kde $\mathcal{B} \neq \emptyset$ je množina (jej prvky sú *body*, označujeme ich zvyčajne $A, B, \dots$) a V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ (jeho prvky sú *vektory*, označujeme ich symbolmi so šípkou) a $+$ je zobrazenie $\mathcal{B} \times V \rightarrow \mathcal{B}$, ktoré každej usporiadanej dvojici $(X, \vec{a}) \in \mathcal{B} \times V$ priradí jediný prvok z $\mathcal{B}$, ktorý potom označíme $X + \vec{a}$, pričom musia byť splnené podmienky:

$$1^* \quad X + (\vec{a} + \vec{b}) = (X + \vec{a}) + \vec{b}, \quad \forall X \in \mathcal{B}, \vec{a}, \vec{b} \in V;$$

$$2^* \quad \forall X \in \mathcal{B}: X + \vec{x} = X \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0};$$

3° pre ľubovoľné $(X, Y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ existuje jediný $\vec{a} \in V$ taký, že $X + \vec{a} = Y$; často sa píše $\vec{a} = Y - X$ (pozor, nie je to „rozdiel bodov“, ale iba iné označenie spomenutého vektora $\vec{a}$).

Netvrdíme, že tento systém podmienok (axióm) sa nedá zjednodušiť.

Použitá a odporúčaná literatúra

1. Birkhoff, G. – Mac Lane, S.: *Prehľad modernej algebry*. Bratislava: ALFA, 1979.
2. Faddejev, A. K. – Sominskij, J. S.: *Zbierka úloh z vyššej algebry*. Bratislava: ALFA, 1968.
3. Hejný, M. – Zaťko, V. – Kršňák, P.: *Geometria 1*. Bratislava: SPN, 1985.
4. Kaprálik, P. – Tvarožek, J.: *Zbierka riešených príkladov a úloh z lineárnej algebry a analytickej geometrie*. Bratislava: ALFA, 1987.
5. Katriňák, T. – Gavalec, M. – Gedeonová, E. – Smítal, J.: *Algebra a teoretická aritmetika* (1). Bratislava: Vydavateľstvo UK, 1999.
6. Klingenberg, W.: *Lineare Algebra und Geometrie*. (3. Auflage). Berlin: Springer-Verlag, 1992.
7. Korbaš, J.: *Lineárna algebra a geometria I*. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 2003.
8. Kostrikin, A. I. – Manin, Yu. I.: *Linear Algebra and Geometry*. New York: Gordon & Breach, 1989.
9. Kostrikin, A. I. (editor): *Exercises in Algebra. A Collection of Exercises in Algebra, Linear Algebra and Geometry*. New York: Gordon and Breach, 1996.
10. Proskurjakov, I. V.: *Problems in Linear Algebra*. Moscow: Mir, 1978.
11. Zlatoš, P.: *Lineárna algebra a geometria. Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných odborov*. Bratislava: Marenčin PT, 2011.

JÚLIUS KORBAŠ

Prednášky z lineárnej algebry a geometrie

Pôvodne zapísal a v editore $\text{\LaTeX}$

spracoval ŠTEFAN GYÜRKI

Vydala Univerzita Komenského v Bratislave vo Vydavateľstve UK

Zodpovedná redaktorka: Mgr. Erika Myslivcová

Návrh obálky: Andrea Jahnátková

Graficky upravil a zalomil v editore $\text{\LaTeX}$: prof. RNDr. Július Korbaš, CSc.

Korigovali autori

Rozsah 132 strán, 7,80 AH, 7,99 VH, 1. vydanie. Vytlačilo Polygrafické stredisko UK v Bratislave.

ISBN 978-80-223-3408-2