

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 1

1. Aký afinný podpriestor v afinnom priestore $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ je množina takých $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, že

$$\begin{aligned}5x_1 + 9x_3 + 2x_4 &= 20 \\ x_2 &= 0?\end{aligned}$$

Nájdite aspoň dva rôzne body a aspoň jeden vektor tohto afinného podpriestoru.

2. Zistite, aký afinný podpriestor v afinnom priestore $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ je množina takých $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, že

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 &= 7.\end{aligned}$$

3. Zistite, či afinný podpriestor z úlohy (2) je afinným podpriestorom afinného podpriestoru z úlohy (1). V akom vzťahu sú vektorové zložky (ináč povedané, smerové priestory) týchto afinných podpriestorov?
4. Nech A, B, C, D sú také body afinného priestoru, že $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Dokážte, že A, B, C, D alebo ležia na jednej priamke, alebo ležia v jednej rovine.
5. V 4-rozmernom afinnom priestore so zvolenou afinnou súradnicovou sústavou majme body $A \equiv (1, 2, -1, 3)$, $B \equiv (2, 0, 4, -1)$, $C \equiv (\frac{1}{3}, 1, 1, 0)$. Nájdite ten jediný bod X , ktorý (podľa jednej z axiém afinného priestoru) prislúcha k bodu A a vektoru $\overrightarrow{BC}$ tak, že $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AX}$

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 2

1. Nech A, B, C, D sú také body afinného priestoru, že $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Dokážte, že A, B, C, D alebo ležia na jednej priamke, alebo ležia v jednej rovine.
2. V 4-rozmernom afinnom priestore so zvolenou afinnou súradnicovou sústavou majme body $A \equiv (1, 2, -1, 3)$, $B \equiv (2, 0, 4, -1)$, $C \equiv (\frac{1}{3}, 1, 1, 0)$. Nájdite ten jediný bod X , ktorý (podľa jednej z axiém afinného priestoru) prislúcha k bodu A a vektoru $\overrightarrow{BC}$ tak, že $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AX}$.
3. Dané sú tri po sebe idúce vrcholy rovnobežníka $ABCD$: $A \equiv (-2, 1)$, $B \equiv (1, 3)$, $C \equiv (4, 0)$. Určte vrchol D , ak všetky údaje sú v afinskej súradnicovej sústave.
4. Nech $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}'$ sú afinné priestory. Ukážete, že ak existuje afinný izomorfizmus $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, tak existuje aj afinný izomorfizmus $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$.

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 3

1. Pre afinný priestor $(\mathcal{B}, V, +)$ dokážte, že:
 - (a) $(Y - X) + (X - Z) = Y - Z$ pre všetky $X, Y, Z \in \mathcal{B}$;
 - (b) $X - X = \vec{0}$ pre všetky $X \in \mathcal{B}$;
 - (c) $(X + \vec{a}) - (Y + \vec{b}) = (X - Y) + \vec{a} - \vec{b}$ pre všetky $X, Y \in \mathcal{B}, \vec{a}, \vec{b} \in V$.
2. Je pravda, že matice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ také, že $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot A + (b_1, \dots, b_n)$, definuje afinný izomorfizmus $(f, \varphi): (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tvoria grupu vzhľadom na násobenie matíc? [Sú také matice regulárne?]
3. Dokážte: barycentrická kombinácia konečného počtu barycentrických kombinácií bodov $A_0, \dots, A_n$ je znova ich barycentrická kombinácia.
4. Dokážte, že $(A_0, A_1, A_2, \dots, A_n)$ je barycentrická súradnicová sústava práve vtedy, keď $(A_1, A_0, A_2, \dots, A_n)$ je barycentrická súradnicová sústava.
5. Nech $(f, \varphi): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ je afinný izomorfizmus. Dokážte: ak $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ je barycentrická súradnicová sústava v $\mathcal{A}$, tak $(f(A_0), f(A_1), \dots, f(A_n))$ je barycentrická súradnicová sústava v $\mathcal{A}'$.

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 4

1. V $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ majme $A_0 = (1, 2, -1, 0)$, $A_1 = (1, 1, 2, 1)$, $A_2 = (0, 1, 1, -1)$, $A_3 = (0, 0, 1, 2)$, $A_4 = (1, 1, 0, 0)$. Dokážte, že $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ je barycentrická súradnicová sústava a vyrátajte (vzhľadom na ňu) barycentrické súradnice bodu $X = (-1, 0, 1, 3)$.

[Je pravda, že $X \equiv (\frac{9}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{11}{7})$?]

2. Nech $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sú barycentrické súradnice bodu M vzhľadom na barycentrický súradnicový systém (A_0, A_1, A_2, A_3) . Dokážte, že potom vzhľadom na afinný súradnicový systém $(A_1; A_0 - A_1, A_2 - A_1, A_3 - A_1)$ máme $M \equiv (\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3)$ a $\lambda_1 = 1 - \lambda_0 - \lambda_2 - \lambda_3$.

3. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny α , obsahujúcej body

$$A \equiv (-1, 1, 0, 1, 5), B \equiv (2, -1, 3, 4, 0), C \equiv (1, 2, 7, 6, 1)$$

a zistite, či priamka p , prechádzajúca bodmi

$$D \equiv (2, 1, -3, 4, 1), E \equiv (0, 1, -3, 3, 1),$$

pretína rovinu α . Ak ju pretína, určte $\alpha \cap p$.

4. Nech $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ je afinné zobrazenie určené tým, že $f(A_0) = (1, 1)$, $f(A_1) = (1, 2)$, $f(A_2) = (0, 0)$, $f(A_3) = (0, 1)$, $f(A_4) = (-1, 1)$, pričom $A_0 = (1, 2, -1, 0)$, $A_1 = (1, 1, 2, 1)$, $A_2 = (0, 1, 1, -1)$, $A_3 = (0, 0, 1, 2)$, $A_4 = (1, 1, 0, 0)$. Vyrátajte $\varphi(Y - A_0)$, ak $Y = (-1, 0, 1, 3)$.

5. Napíšte parametrické aj všeobecné vyjadrenie (a) roviny $\mathcal{A}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi A_0, A_1, A_2 z predchádzajúcej úlohy; (b) nadroviny $\mathcal{B}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi A_0, A_1, A_2, A_3 z predchádzajúcej úlohy. Rozhodnite, či $B \in \mathcal{B}$, ak $B = (-1, 1, -1, -3)$. Ak $B \notin \mathcal{B}$, môže byť $B \in \mathcal{A}$?

6. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny α , obsahujúcej body

$$A \equiv (-1, 1, 0, 1, 5), B \equiv (2, -1, 3, 4, 0), C \equiv (1, 2, 7, 6, 1)$$

a zistite, či priamka p , prechádzajúca bodmi

$$D \equiv (2, 1, -3, 4, 1), E \equiv (0, 1, -3, 3, 1),$$

pretína rovinu α . Ak ju pretína, určte $\alpha \cap p$.

7. Nech $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ je afinné zobrazenie určené tým, že $f(A_0) = (1, 1)$, $f(A_1) = (1, 2)$, $f(A_2) = (0, 0)$, $f(A_3) = (0, 1)$, $f(A_4) = (-1, 1)$, pričom $A_0 = (1, 2, -1, 0)$, $A_1 = (1, 1, 2, 1)$, $A_2 = (0, 1, 1, -1)$, $A_3 = (0, 0, 1, 2)$, $A_4 = (1, 1, 0, 0)$. Vyrátajte $\varphi(Y - A_0)$, ak $Y = (-1, 0, 1, 3)$.

8. Napíšte parametrické aj všeobecné vyjadrenie (a) roviny $\mathcal{A}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi A_0, A_1, A_2 z predchádzajúcej úlohy; (b) nadroviny $\mathcal{B}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi A_0, A_1, A_2, A_3 z predchádzajúcej úlohy. Rozhodnite, či $B \in \mathcal{B}$, ak $B = (-1, 1, -1, -3)$. Ak $B \notin \mathcal{B}$, môže byť $B \in \mathcal{A}$?

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 5

1. V 5-rozmernom afinnom priestore určte vzájomnú polohu afinných podpriestorov

$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 = -7 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_5 = -8 \end{cases}$$

a

$$\beta \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_2 \\ x_2 = 2 + t_2 \\ x_3 = 5 - t_1 + 3t_2 \\ x_4 = 3 + 2t_1 - t_2 \\ x_5 = 1 + 3t_1 - 2t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[Rovnajú sa?]

2. Nech α a β sú také afinné podpriestory afinného priestoru $\mathcal{A}$, že $2 \leq \dim(\alpha) \leq \dim(\beta)$. Dokážte, že $\alpha \parallel \beta$ práve vtedy, keď každá priamka ležiaca v podpriestore α je rovnobežná s podpriestorom β .
3. V 4-rozmernom afinnom priestore je daná priamka

$$p \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 2 + 3t \\ x_3 = 3 + 4t \\ x_4 = 4 + 5t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a rovina

$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Ukážte, že p a α sa nepretínajú a napíšte rovnice dvoch rovnobežných nadrovín, z ktorých jedna obsahuje priamku p a druhá rovinu α .

4. Analyzujte možné vzájomné polohy dvoch nadrovín $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ v n -rozmernom afinnom priestore, ak ich analytické vyjadrenia sú $\mathcal{B} \equiv b_1x_1 + \dots + b_nx_n = b_0$, $\mathcal{C} \equiv c_1x_1 + \dots + c_nx_n = c_0$. [Návod: uvažujte o hodnotiach matíc $\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n & b_0 \\ c_1 & \dots & c_n & c_0 \end{pmatrix}$.]
5. Určte vzájomnú polohu priamky p , prechádzajúcej bodmi $A \equiv (4, 2, 1, 6)$, $B \equiv (0, 4, 5, 4)$ a roviny α , prechádzajúcej bodmi $C \equiv (1, 1, 1, 1)$, $D \equiv (3, 0, 1, 1)$, $E \equiv (1, 1, -1, 2)$.
6. Napíšte rovnicu nadroviny α v štvorrozmernom afinnom priestore, ak α prechádza bodom $A \equiv (-1, 2, 3, 5)$ a je rovnobežná s nadrovinou $\beta \equiv 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5 = 0$.

7. * Dané sú priamka $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 + 2t$, $x_3 = 3 + 3t$, $x_4 = 4 + 4t$ ($t \in \mathbb{R}$) a rovina $x_1 + x_2 = -1$, $x_3 - x_4 = 1$. Ukážte, že táto priamka a rovina sa nepretínajú a napíšte analytické vyjadrenie podpriestoru minimálnej dimenzie, ktorý danou rovinou prechádza rovnobežne s danou priamkou. [$x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -2$?]
8. * Dané sú priamka $x_1 = 1 + 2t$, $x_2 = 2 + 3t$, $x_3 = 3 + 4t$, $x_4 = 4 + 5t$ ($t \in \mathbb{R}$) a rovina $x_1 - x_2 = 0$, $x_3 - x_4 = 1$. Ukážte, že táto priamka a rovina sa nepretínajú a napíšte rovnice rovnobežných nadrovín, prechádzajúcich danou priamkou a danou rovinou. [$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ a $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1$?]

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 6

1. Bodmi afinného priestoru $\mathcal{A}$ nech sú reálne polynómy stupňa nanajvyš 4, vektormi nech sú tiež takéto polynómy, pričom $\overrightarrow{p(t)q(t)} = q(t) - p(t)$. V priestore $\mathcal{A}$ majme priamku a , prechádzajúcu bodmi $2t^4 - 2t$ a $t^4 + t^3 - t$, a priamku b , prechádzajúcu bodmi $2t^3 + 10t^2 + 5$ a $2t^3 - 2t^2 - 1$. Dokážte, že a a b sa pretínajú v jedinom bode a nájdite tento bod.
2. Aké sú súradnice vektora $\vec{x} = (6, 9, 14)$ v $\mathbb{R}^3$ vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, ak $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3)$? Aká je matica prechodu od bázy $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ k štandardnej báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$?
3. V trojrozmernom afinnom priestore sú dané dve súradnicové sústavy,

$$(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \text{ a } (O'; \vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3).$$

Vzhľadom na prvú z nich je začiatok druhej súradnicovej sústavy $O' \equiv (2, 1, 3)$ a bázové vektory sú $\vec{a}'_1 \equiv (2, 4, 1)$, $\vec{a}'_2 \equiv (0, 4, 4)$, $\vec{a}'_3 \equiv (1, 1, 0)$. Nech pre bod X vzhľadom na prvú súradnicovú sústavu je $X \equiv (x, y, z)$ a vzhľadom na druhú $X \equiv (x', y', z')$. Vyjadrite súradnice bodu X v prvej súradnicovej sústave pomocou jeho súradníc v druhej, a tiež súradnice bodu X v druhej súradnicovej sústave pomocou jeho súradníc v prvej.

4. Nech τ je permutácia množiny $\{1, \dots, n\}$ s nepárnym počtom inverzií. Dokážte, že v štandardne orientovanom priestore $\mathbb{R}^n$ je báza $(\vec{e}_{\tau(1)}, \dots, \vec{e}_{\tau(n)})$ záporná.
5. * Vzhľadom na súradnicový systém $Oxyz$ je rovina $O'x'y'$ daná rovnicou $2x + 3y - 6z = -6$, pričom roviny $O'y'z'$, resp. $O'x'z'$ splývajú s rovinami Oyz , resp. Oxz . Napíšte vyjadrenia „čiarkovaných“ súradníc ľubovoľného bodu M pomocou jeho „nečiarkovaných“ súradníc, ak viete, že bod A má v oboch súradnicových systémoch súradnice $(2, 4, 6)$. [$x' = x, y' = y, z' = -\frac{3}{7}(2x + 3y - 6z + 6)$]

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 7

1. V štandardne orientovanom priestore $\mathbb{R}^3$ sú dané vektory $\vec{a} = (0, 1, 1)$ a $\vec{b} = (1, 1, 0)$. Nájdite jednotkový vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ kolmý na vektor $\vec{a}$ a zvierajúci s vektorom $\vec{b}$ uhol $\frac{\pi}{4}$, taký, že $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je kladná báza v $\mathbb{R}^3$. $[\frac{1}{3}(1, 2, -2)?]$
2. V euklidovskom priestore $\mathcal{E}^4$ nájdite všetky body na priamke $\mathcal{P} \equiv \{x_1 = x_2, x_3 = x_4, x_2 = 2x_3\}$, ktorých vzdialenosť od bodu $P \equiv (1, -1, 1, 1)$ je 2.
3. Určte dĺžku telesovej uhlopriečky n -rozmernej kocky s hranou dĺžky a .
4. Nájdite všeobecné vyjadrenie nadroviny v $\mathcal{E}^5$, ktorá obsahuje rovinu $\mathcal{A} \equiv \{x_1 = u, x_2 = 1 + v, x_3 = v, x_4 = v, x_5 = u; u, v \in \mathbb{R}\}$ a je kolmá na priamku $\mathcal{B} \equiv \{x_1 + x_3 + x_4 - 1 = 0, x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, x_1 + 4x_2 - x_3 + 3 = 0, 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 0\}$.
5. * V priestore $Oxyz$ nájdite body ležiace v rovinách Oxy , Oxz a Oyz , ktoré sú spolu s bodom O vrcholmi pravidelného štvorstena s hranou dĺžky 1, ležiaceho v prvom oktante.

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 8

1. Napíšte rovnicu roviny v $\mathcal{E}^3$ kolmej na priamku $\mathcal{P} \equiv \{x_2 + 2x_3 + 1 = 0, x_1 + 3x_3 + 1 = 0\}$, ak prechádza bodom $C \equiv (-1, -1, 0)$.
2. V $\mathcal{E}^4$ nájdite bod X' , ktorý je (kolmo) súmerný k bodu $X \equiv (5, 5, 3, 3)$ vzhľadom na nadrovinu $\mathcal{N} \equiv 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2 = 0$.
3. V $\mathcal{E}^4$ určte vzdialenosť bodu $B \equiv (5, 1, 0, 8)$ a jeho kolmého priemetu do roviny β , prechádzajúcej bodmi $P \equiv (1, 2, 3, 4)$, $Q \equiv (2, 3, 4, 5)$ a $C \equiv (2, 2, 3, 7)$. $[\sqrt{14}]$
4. Určte vzdialenosť bodu $M \equiv (4, 2, -5, 1)$ v $\mathcal{E}^4$ od roviny $\alpha \equiv \{2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9, 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12\}$. $[5?]$
5. Napíšte rovnicu nadroviny β , ktorá je rovnobežná s nadrovinou $\alpha \equiv 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3 = 0$, ak vzdialenosť medzi týmito nadrovinami je $\rho(\alpha, \beta) = 2$. [Sú dve také nadroviny β ?]
6. * Vnútri trojuholníka, vyŕtateho na rovine Oxy rovinami $\alpha \equiv x + 4y + 8z + 8 = 0$, $\beta \equiv x - 2y + 2z + 2 = 0$ a $\gamma \equiv 3x + 4y + 12 = 0$, nájdite bod X , ktorý má rovnakú vzdialenosť od rovín α , β a γ .

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 9

1. V $\mathcal{E}^4$ rovina α prechádza bodmi $A \equiv (1, 1, 1, 1)$, $B \equiv (2, 2, 0, 0)$, $C \equiv (1, 2, 0, 1)$ a priamka $\mathcal{P}$ prechádza bodmi $U \equiv (1, 1, 1, 2)$ a $V \equiv (1, 1, 2, 1)$. Určte vzájomnú polohu $\mathcal{P}$ a α a vzdialenosť medzi týmito afinnými podpriestormi. [Sú mimobežné; ich spoločná kolmica má parametrické vyjadrenie $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = (3/2) + t$, $x_4 = (3/2) + t$; vzdialenosť medzi priamkou a rovinou je $1/2$.]
2. V $\mathcal{E}^4$ rovina α prechádza bodmi $A \equiv (1, 1, 1, 1)$, $B \equiv (3, 0, 1, 1)$, $C \equiv (1, 1, -1, 2)$ a priamka $\mathcal{P}$ prechádza bodmi $U \equiv (4, 2, 1, 6)$ a $V \equiv (0, 4, 5, 4)$. Určte vzájomnú polohu $\mathcal{P}$ a α a vzdialenosť medzi týmito afinnými podpriestormi. [Priamka je rovnobežná s rovinou; vzdialenosť medzi nimi je 5 ?]
3. Určte uhol, ktorý zvierajú priamka $p \equiv x_1 = 4+t$, $x_2 = -2t$, $x_3 = 1-t$, $x_4 = 2$, $t \in \mathbb{R}$, s priamkou $q \equiv x_1 = 3$, $x_2 = t$, $x_3 = 5+t$, $x_4 = -1$, $t \in \mathbb{R}$. [$\frac{\pi}{6}$?]
4. Nájdite dĺžky strán a vnútorné uhly trojuholníka ABC v $\mathcal{E}^4$, ak $A \equiv (-1, 0, -1, 2)$, $B \equiv (0, 2, 0, 3)$ a $C \equiv (2, 1, 1, 2)$. [dĺžka AB = dĺžka AC = $\sqrt{7}$, dĺžka BC = $\sqrt{14}$, uhol pri B je $\pi/2$, uhol pri A = uhol pri C je $\pi/4$?]
5. * Nájdite vzdialenosť bodu $B \equiv (b_1, \dots, b_n)$ v $\mathcal{E}^n$ od priamky s parametrickým vyjadrením $x_1 = a_1 + \lambda_1 t, \dots, x_n = a_n + \lambda_n t$.

$$\left[\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2 - \frac{(\lambda_1(b_1 - a_1) + \dots + \lambda_n(b_n - a_n))^2}{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2}} \right]$$
6. * Nech α a β sú afinné podpriestory v $\mathcal{E}^n$. Dokážte, že ak body $X \in \alpha$ a $Y \in \beta$ sú také, že $\rho(\alpha, \beta) = \rho(X, Y)$, tak priamka určená bodmi X a Y je kolmá na obidva podpriestory α a β .

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 10

1. Nech v (štandardne orientovanom) priestore $\mathbb{R}^3$ sú vektory $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ a $\vec{c} \times \vec{a}$ lineárne závislé. Dokážte, že vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sú lineárne závislé.
2. S využitím vektorového súčinu nájdite v $\mathcal{E}^3$ vzdialenosť a spoločnú kolmicu priamok p a q , ak priamka p obsahuje bod $A \equiv (1, 2, 3)$ a má smerový vektor $\vec{u} \equiv (1, 0, 0)$ a priamka q obsahuje bod $B \equiv (0, 0, 0)$ a má smerový vektor $\vec{v} \equiv (0, 2, 4)$. [Jeden z bodov spoločnej kolmice má súradnice $(0, 2, 3)$? Vzdialenosť je $\frac{1}{\sqrt{5}}$?]
3. Vyrátajte obsah trojuholníka ABC v $\mathcal{E}^3$, ak $A \equiv (1, 0, -1)$, $B \equiv (2, 1, 1)$ a $C \equiv (-3, 2, 2)$. [$\sqrt{37}$?]
4. * Ukážte, že pre ľubovoľné $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

5. * V $\mathbb{R}^3$ určte vektor $\vec{x}$ zo sústavy rovníc $\langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle = \alpha$, $\vec{a}_2 \times \vec{x} = \vec{b}$, kde $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle \neq 0$, $\langle \vec{a}_2, \vec{b} \rangle = 0$.
 $[\vec{x} = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle^{-1}(\alpha \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \times \vec{b})]$
6. * Dokážte, že ak A je špeciálna ortogonálna matica typu 3×3 , t. j. $A \in SO(3) = \{X \in M_{3,3}(\mathbb{R}); X \cdot X^T = I_3, \det(X) = 1\}$, tak

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot A \times (b_1, b_2, b_3) \cdot A = ((a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)) \cdot A$$

pre všetky $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$ v štandardne orientovanom priestore $\mathbb{R}^3$.
 Poznámka: $SO(3)$ je grupa s operáciou násobenia matíc; jej prvky sú matice otočení priestoru $Oxyz$ (alebo $\mathcal{E}^3$) okolo bodu O .

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 11

1. Lineárna transformácia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je daná tým, že $f(1, 1, 2) = (4, 1, -4)$, $f(-1, -1, 3) = (0, -1, -6)$, $f(2, 1, -1) = (4, 3, 3)$. Vyrátajte determinant matice transformácie f vzhľadom na bázu $((1, 1, 2), (-1, -1, 3), (2, 1, -1))$. [4?]
2. Lineárna transformácia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ je daná: $f(1, 0, 0, 0) = (3, 1, 1, 1)$, $f(0, 1, 0, 0) = (1, 3, 1, 1)$, $f(0, 0, 1, 0) = (1, 1, 3, 1)$, $f(0, 0, 0, 1) = (1, 1, 1, 3)$. Vyrátajte determinant matice transformácie f vzhľadom na bázu

$$((3, 1, 1, 1), (1, 3, 1, 1), (1, 1, 3, 1), (1, 1, 1, 3)).$$

V akom vzťahu je k determinantu matice tej istej transformácie vzhľadom na štandardnú bázu a prečo? [48?]

3. Dokážte, že zobrazenie φ trojrozmerného euklidovského vektorového priestoru $(V, \langle, \rangle)$ do seba, dané predpisom $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a}$, kde $\vec{a} \equiv (1, 2, 3)$, je lineárna transformácia tohto priestoru. Nájdite maticu tejto transformácie
 - a) v ortonormálnej báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, v ktorej sú dané súradnice všetkých vektorov;
 - b) v báze $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, kde $\vec{b}_1 \equiv (1, 0, 1)$, $\vec{b}_2 \equiv (2, 0, -1)$, $\vec{b}_3 \equiv (1, 1, 0)$. [a) prvý riadok 1, 2, 3, druhý 2, 4, 6, tretí 3, 6, 9? b) prvý riadok $\frac{20}{3}, -\frac{16}{3}, 8$, druhý $-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -2$, tretí 5, -4, 6?]
4. Určte, pre ktoré $b \in \mathbb{R}$ by matice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mohli byť podobné; dokážte, že pre b , ktoré ste našli, sú naozaj podobné.
5. Dokážte, že ak matica B je podobná matici A , tak aj B^T je podobná A^T .
6. Dokážte, že ak matice A a B sú podobné, tak majú rovnakú hodnotu.
7. * Nech A a B sú reálne matice typu $n \times n$. Dokážte, že ak aspoň jedna z nich je regulárna, tak matice AB a BA sú podobné. Uveďte príklad dvoch singulárnych matíc A a B , pre ktoré matice AB a BA nie sú podobné.

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 12

1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
 [Pre vl. hodn. -2 vl. vektory $c(1, -1, -2)$, ($c \neq 0$); pre vl. hodn. 1 vl. vektory $c(1, -1, 1)$, ($c \neq 0$); pre vl. hodn. 2 vl. vektory $c(1, 1, 0)$, ($c \neq 0$)?]
2. Dokážte, že vlastné hodnoty regulárnej matice A sú inverznými prvkami (vzhľadom na násobenie) k vlastným hodnotám matice A^{-1} .
3. Zistite, či matrica A je podobná matici B , ak $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ a
 $B = \begin{pmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{pmatrix}$. [Návod: Zamyslite sa nad tým, či sú obe matice podobné matici tvaru $\begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$]
4. Vyrátajte $f(1, 1, 1, 1)$, ak $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ je lineárna transformácia, ktorá má vlastné hodnoty $2, -3, 5, -1$ a k nim patriace vlastné vektory (v tom istom poradí) sú $(1, 1, 1, 0), (2, 2, 1, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1)$. [$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (15x_1 - 23x_2 + 10x_3, 10x_1 - 18x_2 + 10x_3, 2x_1 - 7x_2 + 7x_3, -x_4)$?]
5. Nájdite reálne vlastné hodnoty a ľavé (riadkové) aj pravé (stĺpcové) vlastné vektory reálnej matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a zistíte, či je podobná diagonálnej matici. [Jej vlastné hodnoty sú $1, 1, -1, -1$; príslušné vlastné vektory (v tom istom poradí) sú $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)$? Je podobná diagonálnej matici.]

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 13

1. Určte vlastné hodnoty matice A^2 , ak poznáte vlastné hodnoty komplexnej matice A .
2. Nájdite reálne vlastné hodnoty a ľavé (riadkové) aj pravé (stĺpcové) vlastné vektory reálnej matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[K vlastnej hod. 2 vlastné vektory $c_1(1, 1, 0, 0) + c_2(1, 0, 1, 0) + c_3(1, 0, 0, 1)$; k vlastnej hodnote -2 vl. vektory $c(1, -1, -1, -1)$?]

3. * Dokážte, že ak štvorcová matica A je idempotentná, teda ak $A^2 = A$, tak všetky jej vlastné hodnoty sa rovnajú 0 alebo 1.
4. * Dokážte, že ak matice $A, B \in M_{n,n}(R)$ sú také, že $AB = BA$, tak majú spoločný vlastný vektor.
5. * Dokážte, že ak A a B sú ľubovoľné štvorcové matice rovnakého stupňa nad tým istým polom, tak matice AB a BA majú ten istý charakteristický polynóm.
6. * Nech A je taká štvorcová matica, že súčet prvkov každého jej riadka sa rovná 1. Dokážte, že 1 je vlastnou hodnotou matice A .

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 14

1. Zistite, či matica

$$\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}$$

je podobná diagonálnej nad poľom $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$. [Je, nad $\mathbb{R}$.]

2. Dokážte, že ak A a B sú podobné matice, tak majú tú istú stopu: $\text{sto}(A) = \text{sto}(B)$.
3. Určte vlastné hodnoty matice A^2 , ak poznáte vlastné hodnoty matice A .
4. Nájdite dve reálne štvorcové matice, ktoré majú ten istý charakteristický polynóm, ale nie sú podobné. Nájdite tiež aspoň jeden príklad takýchto matíc, kde charakteristický polynóm bude mať aspoň dva rôzne korene.
5. Vyrátajte vlastné hodnoty a vlastné vektory komplexnej matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Je matica A podobná diagonálnej? [Vlastné hodnoty 1, 2, 3; k 1 prislúchajú vlastné vektory $c(1, 0, -1)$, $c \in \mathbb{C} - \{0\}$?]

6. Pomocou stopy a determinantu charakterizujte všetky racionálne štvorcové matice stupňa 2, ktorých vlastné hodnoty sú 1 a -1 .

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 15

1. Nájdite minimálny polynóm reálnej matice

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Dokážte, že pre žiadnu reálnu maticu A typu 3×3 nemôže platiť $A^2 = -I_3$.
3. * Vyrátajte maticu A^n pre ľubovoľné prirodzené číslo n , ak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

[Prvok 2. riadka a 2. stĺpca v A^n je $-1 + 2(-1)^n$?]

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 16

1. Nech matica B vznikne z matice $A \in M_{n,n}(R)$ vzájomnou výmenou i -teho a j -teho riadka a následne i -teho a j -teho stĺpca. Dokážte, že matice A a B sú podobné a nájdite regulárnu maticu P takú, že $PAP^{-1} = B$.
2. Predpokladajme, že poznáme charakteristický polynóm $\chi_A(t)$ danej matice $A \in M_{n,n}(R)$. Nech je daný polynóm $f(t) = c(a_1 - t)(a_2 - t) \dots (a_k - t) \in R[t]$ (kde $c, a_1, \dots, a_k$ sú dané prvky poľa R). Vyjadrite $\det(f(A))$ pomocou známych údajov.
3. * Dokážte, že matica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je nad poľom R podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď minimálny polynóm $\mu_A(t)$ sa nad R úplne rozkladá na navzájom rôzne lineárne činitele.

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 17

1. Pri riešení tejto a nasledujúcej úlohy môžete využiť vetu 13.25 zo skrípt J. Korbaš, Š. Gyürki, Prednášky z lineárnej algebry a geometrie, Vydavateľstvo UK, Bratislava 2013. Nájďte Jordanov normálny tvar (nad $\mathbb{R}$) matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ? \right].$$

2. Nájďte Jordanov normálny tvar (nad $\mathbb{R}$) matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & ? & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ? \right].$$

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 18

1. Nájdite regulárnu lineárnu transformáciu premenných, ktorá kvadratickú formu troch premenných $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$ prevedie na tvar $ay_1^2+by_2^2+cy_3^2$, pričom a, b, c sú z množiny $\{0, 1, -1\}$.
2. Nájdite kánonický tvar kvadratickej formy $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+5x_1x_3-2x_2x_3$ a regulárnu lineárnu transformáciu premenných, v tvare $x_1 = \dots, x_2 = \dots, x_3 = \dots$, ktorá túto formu prevedie na kánonický tvar.
3. Nájdite kánonický tvar kvadratickej formy $x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+x_2^2+2x_2x_3-4x_2x_4+x_3^2-2x_4^2$ a regulárnu lineárnu transformáciu premenných, v tvare $y_1 = \dots, y_2 = \dots, y_3 = \dots, y_4 = \dots$, ktorá túto formu prevedie na kánonický tvar. $[y_1^2+y_2^2-y_3^2? y_4 = x_4, y_3 = x_2 - x_3 + 2x_4, y_2 = x_2 + x_3 + x_4, y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4?]$
4. * Prevedte kvadratickú formu $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i < k} x_i x_k$ na kánonický tvar. [Takmer kánonický tvar je $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}y_n^2?$]

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 19

1. Dá sa kvadratická forma $2x_1x_2-6x_1x_3-6x_2x_4+2x_3x_4$ previesť regulárnou lineárnou transformáciou premenných na formu $3y_1y_2 - 4y_1y_3 + 6y_2y_3?$
2. Nájdite kánonický tvar kvadratickej formy $3x_1^2+2x_2^2-x_3^2-2x_4^2+2x_1x_2-4x_2x_3+2x_2x_4$ a tiež regulárnu lineárnu transformáciu premenných v tvare $x_1 = \dots, x_2 = \dots, x_3 = \dots, x_4 = \dots$, ktorá pôvodnú formu prevedie na kánonický tvar. $[y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2; \dots, x_4 = \frac{\sqrt{629}}{37}y_4?]$
3. * a) Nájdite explicitnú nevyhnutnú a postačujúcu podmienku na to, aby kvadratická forma $\sum_{i=1}^n ax_i^2 + 2\sum_{i,j=1}^n bx_ix_j$ bola kladne definitná.
b) Nájdite explicitnú nevyhnutnú a postačujúcu podmienku na to, aby kvadratická forma $\sum_{i=1}^n ax_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} bx_ix_j$ bola kladne definitná.
[Pri ktorej z týchto možností nevyhnutná a postačujúca podmienka znie: $a > 0$ a $a - b > 0$ a $a + (n - 1)b > 0?$]

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 20

1. Dokážte, že kvadratická forma $ax^2 + 2bxy + cy^2$ premenných x, y je kladne definitná práve vtedy, keď $a > 0$ a $ac - b^2 > 0$.
2. Nájdite všetky hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré je kvadratická forma $5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ kladne definitná. [$a > 2$]
3. Nájdite všetky hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré je kvadratická forma $(4-a)x_1^2 + (4-a)x_2^2 - (2+a)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$ kladne definitná. [$a < -6$]
4. * Dokážte, že všetky vlastné hodnoty kladne definitnej matice sú kladné.

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 21

1. Nájdite všetky hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré je kvadratická forma $-9x_1^2 + 6ax_1x_2 - x_2^2$ záporne definitná. [$-1 < a < 1$]
2. Dokážte, že ak kvadratická forma s maticou A je kladne definitná, tak aj kvadratická forma s maticou A^{-1} je kladne definitná.
3. * Nech matica $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je symetrická a $\Delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$ nech označuje jej i -ty hlavný minor. Dokážte, že A je záporne definitná matica práve vtedy, keď jej hlavné minory sú striedavo záporné a kladné: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, \Delta_n < 0$, ak n je nepárne, resp. $\Delta_n > 0$, ak n je párne.

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 22

1. Nájdite maticu $C \in O(3)$ takú, že $CAC^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

sú vlastné hodnoty reálnej matice A , ktorá je maticou kvadratickej formy troch premenných $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$. [Tvar blízky ku kanonickému je $4y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$; dostane sa ortogon. transform. $x'_1 = (2/3)x_1 - (2/3)x_2 + (1/3)x_3, x'_2 = (2/3)x_1 + (1/3)x_2 - (2/3)x_3, x'_3 = (1/3)x_1 + (2/3)x_2 + (2/3)x_3$?]

2. Nájdite ortogonálnu maticu P a diagonálnu maticu D tak, aby platilo $PAP^T = D$, ak

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Nájdite ortogonálnu maticu P a diagonálnu maticu D tak, aby platilo $PAP^T = D$, ak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Nájdite ortogonálnu maticu P a diagonálnu maticu D tak, aby platilo $PAP^T = D$, ak

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 23

1. Zistite, akú krivku vyjadruje rovnica $2x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 3 = 0$ a nakreslite ju v karteziánskej súradnicovej sústave Ox_1x_2 . [Je to hyperbola, so stredom v bode $S \equiv (1, 2)$, jej asymptoty sú $x_1 = 1$, resp. $x_2 = 2$?]
2. Dokážte, že priamka $7x_1 + x_2 + 6 = 0$ prechádza stredmi kriviek $3x_1^2 - 7x_1x_2 - 6x_2^2 + 3x_1 - 9x_2 + 5 = 0$ a $3x_2^2 - 5x_1x_2 + 6x_2^2 + 11x_1 - 17x_2 + 13 = 0$.
3. Dokážte, že rovnica $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 - 16 = 0$ vyjadruje elipsu a nakreslite ju v karteziánskej súradnicovej sústave Ox_1x_2 .
4. Zistite, akú krivku vyjadruje rovnica $5x_1^2 + 12x_1x_2 - 22x_1 - 12x_2 - 19 = 0$, napíšte jej kánonickú rovnicu a načrtnite ju v karteziánskej súradnicovej sústave Ox_1x_2 . [Hyperbola $u^2/4 - v^2/9 = 1$, stred $(1, 1)$, bod na osi u : $1/\sqrt{13}(3, 2)$, bod na osi v : $1/\sqrt{13}(-2, 3)$?]
5. * Nech $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ je homogénna kvadratická funkcia na reálnom vektorovom priestore V . Je množina $\{\vec{x} \in V; \psi(\vec{x}) \geq 0\}$, resp. $\{\vec{x} \in V; \psi(\vec{x}) \leq 0\}$ vektorovým podpriestorom vo V ? [Uvažujte o $\psi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ pre $V = \mathbb{R}^3$.]

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 24

1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + 2x_2),$$

vzhľadom na bázy $((1, 1), (1, -1))$ a $((1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, 1, -1))$. [1.riad. $5/2, ?, -3/2$; 2. riad. $-1/2, ?, 3/2$.]

2. Ukážte, že ak V je vektorový priestor s bázou $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, tak lineárny izomorfizmus $d : V \rightarrow V^*$, $d(\vec{v}_i) = v_i^*$ ($i = 1, \dots, n$), vo všeobecnosti závisí od bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ (a teda nie je kánonický). [Návod: uvažujte o $V = \mathbb{R}$; ak za bázu v $\mathbb{R}$ zoberieme (1), definujeme lineárne zobrazenie $d_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $d_1(1) = 1^*$, resp. ak za bázu zoberieme (2), definujeme lineárne zobrazenie $d_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $d_2(2) = 2^*$. Ukážte, že $d_2 \neq d_1$.]
3. Dokážte, že lineárne zobrazenie $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s$ je injektívne práve vtedy, keď k nemu duálne zobrazenie $f^* : (\mathbb{R}^s)^* \rightarrow (\mathbb{R}^k)^*$ je surjektívne.
4. * Dokážte, že ak V je konečnorozmerný vektorový priestor a x^* je nenulový prvok duálneho priestoru V^* , tak $\dim(V) - \dim(\text{Ker}(x^*)) = 1$.