PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 3

1. Pre afinný priestor $(\mathcal{B}, V, +)$ dokážte, že:
   (a) $(Y - X) + (X - Z) = Y - Z$ pre všetky $X, Y, Z \in \mathcal{B}$;
   (b) $X - X = \vec{0}$ pre všetky $X \in \mathcal{B}$;
   (c) $(X + \vec{a}) - (Y + \vec{b}) = (X - Y) + \vec{a} - \vec{b}$ pre všetky $X, Y \in \mathcal{B}$, $\vec{a}, \vec{b} \in V$.

2. Je pravda, že matice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ také, že $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot A + (b_1, \ldots, b_n)$, definuje afinný izomorfizmus $(f, \varphi)\colon (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tvoria grupu vzhľadom na násobenie matíc? [Sú také matice regulárne?]

3. Dokážte: barycentrická kombinácia konečného počtu barycentrických kombinácií bodov $A_0, \ldots, A_n$ je znova ich barycentrická kombinácia.

4. Dokážte, že $(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n)$ je barycentrická súradnicová sústava práve vtedy, keď $(A_1, A_0, A_2, \ldots, A_n)$ je barycentrická súradnicová sústava.

5. Nech $(f, \varphi)\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ je afinný izomorfizmus. Dokážte: ak $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ je barycentrická súradnicová sústava v $\mathscr{A}$, tak $(f(A_0), f(A_1), \ldots, f(A_n))$ je barycentrická súradnicová sústava v $\mathscr{A}'$.

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 4

1. V $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ majme $A_0 = (1, 2, -1, 0)$, $A_1 = (1, 1, 2, 1)$, $A_2 = (0, 1, 1, -1)$, $A_3 = (0, 0, 1, 2)$, $A_4 = (1, 1, 0, 0)$. Dokážte, že $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ je barycentrická súradnicová sústava a vyrátajte (vzhľadom na ňu) barycentrické súradnice bodu $X = (-1, 0, 1, 3)$.

   [Je pravda, že $X \equiv (\frac{9}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{11}{7})$?]

2. Nech $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sú barycentrické súradnice bodu M vzhľadom na barycentrický súradnicový systém (A_0, A_1, A_2, A_3). Dokážte, že potom vzhľadom na afinný súradnicový systém $(A_1; A_0 - A_1, A_2 - A_1, A_3 - A_1)$ máme $M \equiv (\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3)$ a $\lambda_1 = 1 - \lambda_0 - \lambda_2 - \lambda_3$.

3. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny α, obsahujúcej body

   $$A \equiv (-1, 1, 0, 1, 5), B \equiv (2, -1, 3, 4, 0), C \equiv (1, 2, 7, 6, 1)$$

   a zistite, či priamka p, prechádzajúca bodmi

   $$D \equiv (2, 1, -3, 4, 1), E \equiv (0, 1, -3, 3, 1),$$

   pretína rovinu α. Ak ju pretína, určte $\alpha \cap p$.

4. Nech $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \to (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ je afinné zobrazenie určené tým, že $f(A_0) = (1, 1)$, $f(A_1) = (1, 2)$, $f(A_2) = (0, 0)$, $f(A_3) = (0, 1)$, $f(A_4) = (-1, 1)$, pričom $A_0 = (1, 2, -1, 0)$, $A_1 = (1, 1, 2, 1)$, $A_2 = (0, 1, 1, -1)$, $A_3 = (0, 0, 1, 2)$, $A_4 = (1, 1, 0, 0)$. Vyrátajte $\varphi(Y - A_0)$, ak $Y = (-1, 0, 1, 3)$.

5. Napíšte parametrické aj všeobecné vyjadrenie (a) roviny $\mathscr{A}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi A_0, A_1, A_2 z predchádzajúcej úlohy; (b) nadroviny $\mathscr{B}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi A_0, A_1, A_2, A_3 z predchádzajúcej úlohy. Rozhodnite, či $B \in \mathscr{B}$, ak $B = (-1, 1, -1, -3)$. Ak $B \notin \mathscr{B}$, môže byť $B \in \mathscr{A}$?

6. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny α, obsahujúcej body

   $$A \equiv (-1, 1, 0, 1, 5), B \equiv (2, -1, 3, 4, 0), C \equiv (1, 2, 7, 6, 1)$$

   a zistite, či priamka p, prechádzajúca bodmi

   $$D \equiv (2, 1, -3, 4, 1), E \equiv (0, 1, -3, 3, 1),$$

   pretína rovinu α. Ak ju pretína, určte $\alpha \cap p$.

7. Nech $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \to (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ je afinné zobrazenie určené tým, že $f(A_0) = (1, 1)$, $f(A_1) = (1, 2)$, $f(A_2) = (0, 0)$, $f(A_3) = (0, 1)$, $f(A_4) = (-1, 1)$, pričom $A_0 = (1, 2, -1, 0)$, $A_1 = (1, 1, 2, 1)$, $A_2 = (0, 1, 1, -1)$, $A_3 = (0, 0, 1, 2)$, $A_4 = (1, 1, 0, 0)$. Vyrátajte $\varphi(Y - A_0)$, ak $Y = (-1, 0, 1, 3)$.

8. Napíšte parametrické aj všeobecné vyjadrenie (a) roviny $\mathscr{A}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi A_0, A_1, A_2 z predchádzajúcej úlohy; (b) nadroviny $\mathscr{B}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi A_0, A_1, A_2, A_3 z predchádzajúcej úlohy. Rozhodnite, či $B \in \mathscr{B}$, ak $B = (-1, 1, -1, -3)$. Ak $B \notin \mathscr{B}$, môže byť $B \in \mathscr{A}$?

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 5

1. V 5-rozmernom afinnom priestore určte vzájomnú polohu afinných podpriestorov
$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 = -7 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_5 = -8 \end{cases}$$
a
$$\beta \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_2 \\ x_2 = 2 \qquad + t_2 \\ x_3 = 5 - t_1 + 3t_2 \\ x_4 = 3 + 2t_1 - t_2 \\ x_5 = 1 + 3t_1 - 2t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
[Rovnajú sa?]

2. Nech α a β sú také afinné podpriestory afinného priestoru $\mathscr{A}$, že $2 \leq \dim(\alpha) \leq \dim(\beta)$. Dokážte, že $\alpha || \beta$ práve vtedy, keď každá priamka ležiaca v podpriestore α je rovnobežná s podpriestorom β.

3. V 4-rozmernom afinnom priestore je daná priamka
$$p \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 2 + 3t \\ x_3 = 3 + 4t \\ x_4 = 4 + 5t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$
a rovina
$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$
Ukážte, že p a α sa nepretínajú a napíšte rovnice dvoch rovnobežných nadrovín, z ktorých jedna obsahuje priamku p a druhá rovinu α.

4. Analyzujte možné vzájomné polohy dvoch nadrovín $\mathscr{B}$ a $\mathscr{C}$ v n-rozmernom afinnom priestore, ak ich analytické vyjadrenia sú $\mathscr{B} \equiv b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = b_0$, $\mathscr{C} \equiv c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = c_0$. [Návod: uvažujte o hodnostiach matíc $\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n & b_0 \\ c_1 & \dots & c_n & c_0 \end{pmatrix}$.]

5. Určte vzájomnú polohu priamky p, prechádzajúcej bodmi $A \equiv (4, 2, 1, 6)$, $B \equiv (0, 4, 5, 4)$ a roviny α, prechádzajúcej bodmi $C \equiv (1, 1, 1, 1)$, $D \equiv (3, 0, 1, 1)$, $E \equiv (1, 1, -1, 2)$.

6. Napíšte rovnicu nadroviny α v štvorrozmernom afinnom priestore, ak α prechádza bodom $A \equiv (-1, 2, 3, 5)$ a je rovnobežná s nadrovinou $\beta \equiv 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5 = 0$.

7. * Dané sú priamka $x_1 = 1+t$, $x_2 = 2+2t$, $x_3 = 3+3t$, $x_4 = 4+4t$ $(t \in \mathbb{R})$ a rovina $x_1 + x_2 = -1$, $x_3 - x_4 = 1$. Ukážte, že táto priamka a rovina sa nepretínajú a napíšte analytické vyjadrenie podpriestoru minimálnej dimenzie, ktorý danou rovinou prechádza rovnobežne s danou priamkou. [$x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -2$?]

8. * Dané sú priamka $x_1 = 1+2t$, $x_2 = 2+3t$, $x_3 = 3+4t$, $x_4 = 4+5t$ $(t \in \mathbb{R})$ a rovina $x_1 - x_2 = 0$, $x_3 - x_4 = 1$. Ukážte, že táto priamka a rovina sa nepretínajú a napíšte rovnice rovnobežných nadrovín, prechádzajúcich danou priamkou a danou rovinou. [$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ a $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1$?]