PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 6

1. Bodmi afinného priestoru $\mathscr{A}$ nech sú reálne polynómy stupňa nanajvýš 4, vektormi nech sú tiež takéto polynómy, pričom $\overrightarrow{p(t)q(t)} = q(t) - p(t)$. V priestore $\mathscr{A}$ majme priamku a, prechádzajúcu bodmi $2t^4 - 2t$ a $t^4 + t^3 - t$, a priamku b, prechádzajúcu bodmi $2t^3 + 10t^2 + 5$ a $2t^3 - 2t^2 - 1$. Dokážte, že a a b sa pretínajú v jedinom bode a nájdite tento bod.

2. Aké sú súradnice vektora $\vec{x} = (6, 9, 14)$ v $\mathbb{R}^3$ vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, ak $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3)$? Aká je matica prechodu od bázy $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ k štandardnej báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$?

3. V trojrozmernom afinnom priestore sú dané dve súradnicové sústavy,
$$(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \text{ a } (O'; \vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3).$$
Vzhľadom na prvú z nich je začiatok druhej súradnicovej sústavy $O' \equiv (2, 1, 3)$ a bázové vektory sú $\vec{a}'_1 \equiv (2, 4, 1), \vec{a}'_2 \equiv (0, 4, 4), \vec{a}'_3 \equiv (1, 1, 0)$. Nech pre bod X vzhľadom na prvú súradnicovú sústavu je $X \equiv (x, y, z)$ a vzhľadom na druhú $X \equiv (x', y', z')$. Vyjadrite súradnice bodu X v prvej súradnicovej sústave pomocou jeho súradníc v druhej, a tiež súradnice bodu X v druhej súradnicovej sústave pomocou jeho súradníc v prvej.

4. Nech τ je permutácia množiny $\{1, \dots, n\}$ s nepárnym počtom inverzií. Dokážte, že v štandardne orientovanom priestore $\mathbb{R}^n$ je báza $(\vec{e}_{\tau(1)}, \dots, \vec{e}_{\tau(n)})$ záporná.

5. * Vzhľadom na súradnicový systém $Oxyz$ je rovina $O'x'y'$ daná rovnicou $2x + 3y - 6z = -6$, pričom roviny $O'y'z'$, resp. $O'x'z'$ splývajú s rovinami Oyz, resp. Oxz. Napíšte vyjadrenia „čiarkovaných" súradníc ľubovoľného bodu M pomocou jeho „nečiarkovaných" súradníc, ak viete, že bod A má v oboch súradnicových systémoch súradnice $(2, 4, 6)$. [$x' = x, y' = y, z' = -\frac{3}{7}(2x + 3y - 6z + 6)$?]

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 7

1. V štandardne orientovanom priestore $\mathbb{R}^3$ sú dané vektory $\vec{a} = (0,1,1)$ a $\vec{b} = (1,1,0)$. Nájdite jednotkový vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ kolmý na vektor $\vec{a}$ a zvierajúci s vektorom $\vec{b}$ uhol $\frac{\pi}{4}$, taký, že $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je kladná báza v $\mathbb{R}^3$. $[\frac{1}{3}(1,2,-2)?]$

2. V euklidovskom priestore $\mathscr{E}^4$ nájdite všetky body na priamke $\mathscr{P} \equiv \{x_1 = x_2, x_3 = x_4, x_2 = 2x_3\}$, ktorých vzdialenosť od bodu $P \equiv (1,-1,1,1)$ je 2.

3. Určte dĺžku telesovej uhlopriečky n-rozmernej kocky s hranou dĺžky a.

4. Nájdite všeobecné vyjadrenie nadroviny v $\mathscr{E}^5$, ktorá obsahuje rovinu $\mathscr{A} \equiv \{x_1 = u,\ x_2 = 1+v,\ x_3 = v,\ x_4 = v,\ x_5 = u;\ u, v \in \mathbb{R}\}$ a je kolmá na priamku $\mathscr{B} \equiv \{x_1+x_3+x_4-1 = 0, x_2+x_3+x_4+x_5 = 0, x_1+4x_2-x_3+3 = 0, 2x_1-3x_2+x_3+x_4+2 = 0\}$.

5. * V priestore $Oxyz$ nájdite body ležiace v rovinách Oxy, Oxz a Oyz, ktoré sú spolu s bodom O vrcholmi pravidelného štvorstena s hranou dĺžky 1, ležiaceho v prvom oktante.