PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 10

1. Nech v (štandardne orientovanom) priestore $\mathbb{R}^3$ sú vektory $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ a $\vec{c} \times \vec{a}$ lineárne závislé. Dokážte, že vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sú lineárne závislé.

2. S využitím vektorového súčinu nájdite v $\mathscr{E}^3$ vzdialenosť a spoločnú kolmicu priamok p a q, ak priamka p obsahuje bod $A \equiv (1,2,3)$ a má smerový vektor $\vec{u} \equiv (1,0,0)$ a priamka q obsahuje bod $B \equiv (0,0,0)$ a má smerový vektor $\vec{v} \equiv (0,2,4)$. [Jeden z bodov spoločnej kolmice má súradnice $(0,2,3)$? Vzdialenosť je $\frac{1}{\sqrt{5}}$?]

3. Vyrátajte obsah trojuholníka ABC v $\mathscr{E}^3$, ak $A \equiv (1,0,-1)$, $B \equiv (2,1,1)$ a $C \equiv (-3,2,2)$. [$\sqrt{37}$?]

4. * Ukážte, že pre ľubovoľné $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

5. * V $\mathbb{R}^3$ určte vektor $\vec{x}$ zo sústavy rovníc $\langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle = \alpha$, $\vec{a}_2 \times \vec{x} = \vec{b}$, kde $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle \neq 0$, $\langle \vec{a}_2, \vec{b} \rangle = 0$.
[$\vec{x} = \langle a_1, a_1 \rangle^{-1} (\alpha \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \times \vec{b})$]

6. * Dokážte, že ak A je špeciálna ortogonálna matica typu 3×3, t. j. $A \in SO(3) = \{X \in M_{3,3}(\mathbb{R}); X \cdot X^T = I_3, \det(X) = 1\}$, tak

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot A \times (b_1, b_2, b_3) \cdot A = ((a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)) \cdot A$$

pre všetky (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) v štandardne orientovanom priestore $\mathbb{R}^3$. Poznámka: $SO(3)$ je grupa s operáciou násobenia matíc; jej prvky sú matice otočení priestoru $Oxyz$ (alebo $\mathscr{E}^3$) okolo bodu O.

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 11

1. Lineárna transformácia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je daná tým, že $f(1,1,2) = (4,1,-4)$, $f(-1,-1,3) = (0,-1,-6)$, $f(2,1,-1) = (4,3,3)$. Vyrátajte determinant matice transformácie f vzhľadom na bázu $((1,1,2),(-1,-1,3),(2,1,-1))$. [4?]

2. Lineárna transformácia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je daná: $f(1,0,0,0) = (3,1,1,1)$, $f(0,1,0,0) = (1,3,1,1)$, $f(0,0,1,0) = (1,1,3,1)$, $f(0,0,0,1) = (1,1,1,3)$. Vyrátajte determinant matice transformácie f vzhľadom na bázu
$$((3,1,1,1),(1,3,1,1),(1,1,3,1),(1,1,1,3)).$$
V akom vzťahu je k determinantu matice tej istej transformácie vzhľadom na štandardnú bázu a prečo? [48?]

3. Dokážte, že zobrazenie φ trojrozmerného euklidovského vektorového priestoru $(V,\langle,\rangle)$ do seba, dané predpisom $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x},\vec{a}\rangle\vec{a}$, kde $\vec{a} \equiv (1,2,3)$, je lineárna transformácia tohto priestoru. Nájdite maticu tejto transformácie a) v ortonormálnej báze $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, v ktorej sú dané súradnice všetkých vektorov; b) v báze $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, kde $\vec{b}_1 \equiv (1,0,1)$, $\vec{b}_2 \equiv (2,0,-1)$, $\vec{b}_3 \equiv (1,1,0)$. [a) prvý riadok $1,2,3$, druhý $2,4,6$, tretí $3,6,9$? b) prvý riadok $\frac{20}{3},-\frac{16}{3},8$, druhý $-\frac{5}{3},\frac{4}{3},-2$, tretí $5,-4,6$?]

4. Určte, pre ktoré $b \in \mathbb{R}$ by matice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mohli byť podobné; dokážte, že pre b, ktoré ste našli, sú naozaj podobné.

5. Dokážte, že ak matica B je podobná matici A, tak aj B^T je podobná A^T.

6. Dokážte, že ak matice A a B sú podobné, tak majú rovnakú hodnosť.

7. * Nech A a B sú reálne matice typu $n \times n$. Dokážte, že ak aspoň jedna z nich je regulárna, tak matice AB a BA sú podobné. Uveďte príklad dvoch singulárnych matíc A a B, pre ktoré matice AB a BA nie sú podobné.

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 12

1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   [Pre vl. hodn. -2 vl. vektory $c(1,-1,-2)$, $(c \neq 0)$; pre vl. hodn. 1 vl. vektory $c(1,-1,1)$, $(c \neq 0)$; pre vl. hodn. 2 vl. vektory $c(1,1,0)$, $(c \neq 0)$?]

2. Dokážte, že vlastné hodnoty regulárnej matice A sú inverzné prvky (vzhľadom na násobenie) k vlastným hodnotám matice A^{-1}.

3. Zistite, či matica A je podobná matici B, ak $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{pmatrix}$. [Návod: Zamyslite sa nad tým, či sú obe matice podobné matici tvaru $\begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$]

4. Vyrátajte $f(1,1,1,1)$, ak $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ je lineárna transformácia, ktorá má vlastné hodnoty 2, -3, 5, -1 a k nim patriace vlastné vektory (v tom istom poradí) sú $(1,1,1,0), (2,2,1,0), (1,0,-1,0), (0,0,0,1)$. [$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (15x_1 - 23x_2 + 10x_3, 10x_1 - 18x_2 + 10x_3, 2x_1 - 7x_2 + 7x_3, -x_4)$?]

5. Nájdite reálne vlastné hodnoty a ľavé (riadkové) aj pravé (stĺpcové) vlastné vektory reálnej matice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   a zistite, či je podobná diagonálnej matici. [Jej vlastné hodnoty sú 1, 1, -1, -1; príslušné vlastné vektory (v tom istom poradí) sú $(1,0,0,1)$, $(0,1,1,0)$, $(0,-1,1,0)$, $(-1,0,0,1)$? Je podobná diagonálnej matici.]