

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 15

1. Nájdite minimálny polynóm reálnej matice

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Dokážte, že pre žiadnu reálnu maticu A typu 3×3 nemôže platiť $A^2 = -I_3$.
3. * Vyrátajte maticu A^n pre ľubovoľné prirodzené číslo n , ak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

[Prvok 2. riadka a 2. stĺpca v A^n je $-1 + 2(-1)^n$?]

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 16

1. Nech matica B vznikne z matice $A \in M_{n,n}(R)$ vzájomnou výmenou i -teho a j -teho riadka a následne i -teho a j -teho stĺpca. Dokážte, že matice A a B sú podobné a nájdite regulárnu maticu P takú, že $PAP^{-1} = B$.
2. Predpokladajme, že poznáme charakteristický polynóm $\chi_A(t)$ danej matice $A \in M_{n,n}(R)$. Nech je daný polynóm $f(t) = c(a_1 - t)(a_2 - t) \dots (a_k - t) \in R[t]$ (kde c, a_1, \dots, a_k sú dané prvky poľa R). Vyjadrite $\det(f(A))$ pomocou známych údajov.
3. * Dokážte, že matica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je nad poľom R podobná diagonálnej matici práve vtedy, keď minimálny polynóm $\mu_A(t)$ sa nad R úplne rozkladá na navzájom rôzne lineárne činitele.