

### PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 20

1. Dokážte, že kvadratická forma  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  premenných  $x, y$  je kladne definitná práve vtedy, keď  $a > 0$  a  $ac - b^2 > 0$ .
2. Nájdite všetky hodnoty parametra  $a \in \mathbb{R}$ , pre ktoré je kvadratická forma  $5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  kladne definitná. [ $a > 2$ ?]
3. Nájdite všetky hodnoty parametra  $a \in \mathbb{R}$ , pre ktoré je kvadratická forma  $(4-a)x_1^2 + (4-a)x_2^2 - (2+a)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$  kladne definitná. [ $a < -6$ ?]
4. \* Dokážte, že všetky vlastné hodnoty kladne definitnej matice sú kladné.

### PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 21

1. Nájdite všetky hodnoty parametra  $a \in \mathbb{R}$ , pre ktoré je kvadratická forma  $-9x_1^2 + 6ax_1x_2 - x_2^2$  záporne definitná. [ $-1 < a < 1$ ?]
2. Dokážte, že ak kvadratická forma s maticou  $A$  je kladne definitná, tak aj kvadratická forma s maticou  $A^{-1}$  je kladne definitná.
3. \* Nech matica  $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  je symetrická a  $\Delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$  nech označuje jej  $i$ -ty hlavný minor. Dokážte, že  $A$  je záporne definitná matica práve vtedy, keď jej hlavné minory sú striedavo záporné a kladné:  $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, \Delta_n < 0$ , ak  $n$  je nepárne, resp.  $\Delta_n > 0$ , ak  $n$  je párne.