PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 23

1. Zistite, akú krivku vyjadruje rovnica $2x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 3 = 0$ a nakreslite ju v karteziánskej súradnicovej sústave Ox_1x_2. [Je to hyperbola, so stredom v bode $S \equiv (1, 2)$, jej asymptoty sú $x_1 = 1$, resp. $x_2 = 2$?]

2. Dokážte, že priamka $7x_1 + x_2 + 6 = 0$ prechádza stredmi kriviek $3x_1^2 - 7x_1x_2 - 6x_2^2 + 3x_1 - 9x_2 + 5 = 0$ a $3x_2^2 - 5x_1x_2 + 6x_2^2 + 11x_1 - 17x_2 + 13 = 0$.

3. Dokážte, že rovnica $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 - 16 = 0$ vyjadruje elipsu a nakreslite ju v karteziánskej súradnicovej sústave Ox_1x_2.

4. Zistite, akú krivku vyjadruje rovnica $5x_1^2 + 12x_1x_2 - 22x_1 - 12x_2 - 19 = 0$, napíšte jej kánonickú rovnicu a načrtnite ju v karteziánskej súradnicovej sústave Ox_1x_2. [Hyperbola $u^2/4 - v^2/9 = 1$, stred $(1, 1)$, bod na osi u: $1/\sqrt{1}3(3, 2)$, bod na osi v:$1/\sqrt{1}3(-2, 3)$?]

5. * Nech $\psi : V \to \mathbb{R}$ je homogénna kvadratická funkcia na reálnom vektorovom priestore V. Je množina $\{\vec{x} \in V; \psi(\vec{x}) \geq 0\}$, resp. $\{\vec{x} \in V; \psi(\vec{x}) \leq 0\}$ vektorovým podpriestorom vo V? [Uvažujte o $\psi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ pre $V = \mathbb{R}^3$.]

PREDNÁŠKOVÉ ÚLOHY 24

1. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + 2x_2),$$

   vzhľadom na bázy $((1, 1), (1, -1))$ a $((1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, 1, -1))$. [1.riad. 5/2, ?, -3/2; 2. riad. -1/2, ?, 3/2.]

2. Ukážte, že ak V je vektorový priestor s bázou $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, tak lineárny izomorfizmus $d : V \to V^*$, $d(\vec{v}_i) = v_i^*$ $(i = 1, \dots, n)$, vo všeobecnosti závisí od bázy $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ (a teda nie je kánonický). [Návod: uvažujte o $V = \mathbb{R}$; ak za bázu v $\mathbb{R}$ zoberieme (1), definujeme lineárne zobrazenie $d_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $d_1(1) = 1^*$, resp. ak za bázu zoberieme (2), definujeme lineárne zobrazenie $d_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, $d_2(2) = 2^*$. Ukážte, že $d_2 \neq d_1$.]

3. Dokážte, že lineárne zobrazenie $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ je injektívne práve vtedy, keď k nemu duálne zobrazenie $f^* : (\mathbb{R}^s)^* \to (\mathbb{R}^k)^*$ je surjektívne.

4. * Dokážte, že ak V je konečnorozmerný vektorový priestor a x^* je nenulový prvok duálneho priestoru V^*, tak $\dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(x^*)) = 1$.