Doplnková domáca úloha z algebry I

Vyriešením nasledujúcich príkladov môžete získať ďalšie body ku skúške z algebry, resp. k doplnkovým cvičeniam z algebry. Príklady treba odovzdať, napr. do môjho priečinku na M127, aspoň jeden deň pred termínom, na ktorom majú byť zarátané.

Bodovanie je robené systémom prvý bod jeden príklad, druhý bod dva príklady atď. Prakticky to znamená, že odovzdané príklady obodujem normálne a výsledok zobrazím funkciou f, ktorá spĺňa $0f = 0$, $1f = 1$, $3f = 2$, $6f = 3$, $10f = 4$ a ktorej graf je na každom z intervalov $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 1, 3\rangle$, $\langle 3, 6\rangle$, $\langle 6, 10\rangle$ úsečkou. Prípadné prémiové body sa prenášajú v plnej výške.

Pripomínam, že súčasťou riešenia je aj dôkaz správnosti.

Príklad 1. Nech $f : X \to Y$ je zobrazenie. Dokážte, že f je injektívne práve vtedy, keď pre každé $A, B \subseteq X$ platí $(A \cap B)f = Af \cap Bf$.

Príklad 2. Nech $(F, +, \cdot)$ je konečné pole s q prvkami a n je prirodzené číslo. Určte veľkosť grúp $GL(n, F)$ a $PGL(n, F)$ ako funkciu q a n (GL sú regulárne matice, PGL je faktorizované podľa skalárnych násobkov identity).

Príklad 3. Nech $H = \{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \}$, je množina matíc s komplexnými koeficientami. Overte, že H je grupa vzhľadom na násobenie matíc a zistite, či je táto grupa izomorfná s niektorou z grúp $(\mathbb{Z}_8, +)$, $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)$, $(\mathbb{Z}_2^3, +)$, $(D_4, \circ)$, $(A_4, \circ)$.

Príklad 4. Nech $n > 1$ je prirodzené číslo a nech $\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n : \exists b \in \mathbb{Z}_n \; ab = 1\}$.

1. Dokážte, že $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ je grupa.
2. Dokážte, že $\mathbb{Z}_n^* = \{a \in \mathbb{Z}_n : NSD(a, n) = 1\}$.
3. Vypočítajte veľkosť $\mathbb{Z}_n^*$.

Príklad 5.

1. Dokážte, že podgrupa grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ generovaná množinou $\{2, 3\}$ je izomorfná s grupou $(\mathbb{Z}^2, +)$.
2. Dokážte že pre každé prirodzené číslo n grupa $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ obsahuje podgrupu izomorfnú s grupou $(\mathbb{Z}^n, +)$.

Príklad 6. Nech $(G, \cdot)$ je grupa, nech N je normálna podgrupa $(G, \cdot)$ a nech H je normálna podgrupa $(N, \cdot)$. Dokážte, že H je normálna podgrupa $(G, \cdot)$.

Príklad 7. Nech $(G, \cdot)$ je grupa, nech N je normálna podgrupa grupy $(G, \cdot)$ a nech H je podgrupa grupy $(G, \cdot)$. Dokážte, že platí:

1. $H \cdot N = \{hn : \; h \in H, \; n \in N\}$ je podgrupa G.
2. N je normálna podgrupa $(H \cdot N, \cdot)$ a $H \cap N$ je normálna podgrupa $(H, \cdot)$.

3. Faktorové grupy $(H \cdot N/N, \cdot)$ a $(H/H \cap N, \cdot)$ sú izomorfné.

Príklad 8. Nech $n > 1$ je prirodzené číslo.

1. Nájdite všetky grupové homomorfizmy $(\mathbb{Z}_n, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
2. Dokážte, že na množine M všetkých homomorfizmov $(\mathbb{Z}_n, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ je predpisom $x(\varphi * \psi) = x\varphi \cdot x\psi$ definovaná binárna operácia, a že dvojica $(M, *)$ je grupa.
3. *Prémia.* Zistite, či je táto grupa komutatívna, prípadne cyklická.

Príklad 9. Nech $n > 1$ je prirodzené číslo a nech

$$M = \{\{a, b\} : \ 1 \leq a, b \leq n, \ a \neq b\}.$$

Dokážte že grupa $(S_n, \circ)$ má na množine M akciu ρ definovanú predpisom $(\{a, b\}, \varphi)\rho = \{a\varphi, b\varphi\}$. Zistite pre ktoré n sú všetky permutácie ρ_φ množiny M párne.

Príklad 10. Nech $n > 1$ je prirodzené číslo a nech

$$M = \{\{a, b\} : \ 1 \leq a, b \leq n, \ a \neq b\}.$$

1. Dokážte že grupa $(S_n, \circ)$ má na množine M^2 akciu ρ definovanú predpisom $((\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}), \varphi)\rho = (\{a_1\varphi, b_1\varphi\}, \{a_2\varphi, b_2\varphi\})$.
2. Nájdite všetky orbity tejto akcie.
3. Pre každý prvok množiny M^2 nájdite je stabilizátor v akcii ρ.