

Doplnkové domáce úlohy

Prvá časť

V nasledujúcich príkladoch doplňte číselnú hodnotu a zdôvodnite správnosť svojej odpovede.

1. (0,5 bodu) Nech $\chi_A(x)$ je charakteristický polynóm komplexnej matice A . Ak $\chi_A(x) = x(x^2 + 2x + 1)(x^2 - x - 2)$ a k je počet navzájom rôznych vlastných čísel A , tak $k =$ -----
2. (0,5 bodu) Nech J je Jordanov kanonický tvar komplexnej matice A rozmeru 11×11 . Nech $4 \in \mathbb{C}$ je vlastné číslo A s algebraickou násobnosťou 11 a nech

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathbb{C}^{11}; \vec{v} \cdot (4 \cdot I - A) = \vec{0} \right\}, \\ V_2 &= \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathbb{C}^{11}; \vec{v} \cdot (4 \cdot I - A)^2 = \vec{0} \right\}. \end{aligned}$$

Ak $\dim(V_1) = 4$, $\dim(V_2) = 8$ a najmenší Jordanov blok J má rozmer $k \times k$, tak $k =$ -----

3. (0,5 bodu) Nech A je reálna symetrická matica rozmeru 13×13 so signatúrou $\text{sgn}(A) = (n_+; n_-; n_0)$. Ak $h(A) = 9$ a $n_+ - n_- = -1$ tak $n_+ =$ -----
4. (0,5 bodu) Nech $\mathcal{Q}$ je kvadrika v $\mathbb{R}^2$ daná predpisom $\vec{x} A \vec{x}^T + \vec{x} \vec{b}^T + c = 0$. Ak $\mathcal{Q}$ je nestredová, tak $h(A) =$ -----
5. (0,5 bodu) Nech $P \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ je ortonormálna matica, nech $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^7$. Ak $\|\vec{v}_1\| = 1$, $\|\vec{v}_2\| = 1$ a $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, tak $\|\vec{v}_1 \cdot P + \vec{v}_2 \cdot P\| =$ -----
6. (0,5 bodu) Nech $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je matica zhodného lineárneho zobrazenia $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ak P je matica otočenia o $\frac{\pi}{4}$, $(v_1, v_2) = (1, 1) \cdot P$, tak $v_2 =$ -----

Druhá časť

7. (1 bod) Pre dané lineárne zobrazenie $L: \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$, danú bázu α priestoru $\mathbb{Q}^4$ vypočítajte bázu κ jadra L , bázu ι obrazu L , maticu L vzhľadom na bázy ε_4 a α a nájdite bázu β priestoru $\mathbb{Q}^4$ takú, že matica L vzhľadom na bázy β a α je rovná matici $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ε_4 je štandardná báza $\mathbb{Q}^4$).

$$L: (v_1, v_2, v_3, v_4) \mapsto (-v_1 - v_2 + v_3 - v_4, v_1 + v_2 - 2v_3, 0, v_2 + v_4),$$

$$\alpha = ((-2, -1, -2, 1), (0, -2, -1, 1), (2, 0, 1, 0), (-1, -1, -1, 1))$$

8. (1 bod) Pre rovinu ϱ danú parametricky vypočítajte maticu A zhodného lineárneho zobrazenia $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ súmernosti podľa roviny ϱ , vzhľadom na ε_3 , ε_3 kde ε_3 je štandardná báza $\mathbb{R}^3$.

$$\rho = \{ \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^3; \vec{x} = t_1 \cdot (0, 0, 1) + t_2 \cdot (1, 1, -2); t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}$$

9. (1 bod) Príklad číslo 6 z 9. sady domácich úloh. Riešenie nemusí byť metódou najmenších štvorcov.

10. (1 bod) Pre danú sústavu lineárnych rovníc so $A \cdot \vec{x}^T = \vec{b}^T$ metódou najmenších štvorcov vypočítajte množinu X všetkých $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ takých, že dĺžka vektora $A \cdot \vec{x}^T - \vec{b}^T$ má najmenšiu možnú hodnotu.

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 & = & 5 \\ & x_4 & = -1 \\ -x_1 & -x_3 - x_4 & = 2 \end{array}$$

11. (1 bod) Pre danú komplexnú maticu A rozmeru 5×5 vypočítajte Jordanov normálny tvar J taký, že reálne vlastné čísla A sú usporiadané od najväčšieho po najmenšie, Jordanove bloky sú pre to isté vlastné číslo usporiadané od najväčšieho po najmenší. *Nepovinné:* vypočítajte maticu P takú že $J = PAP^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$