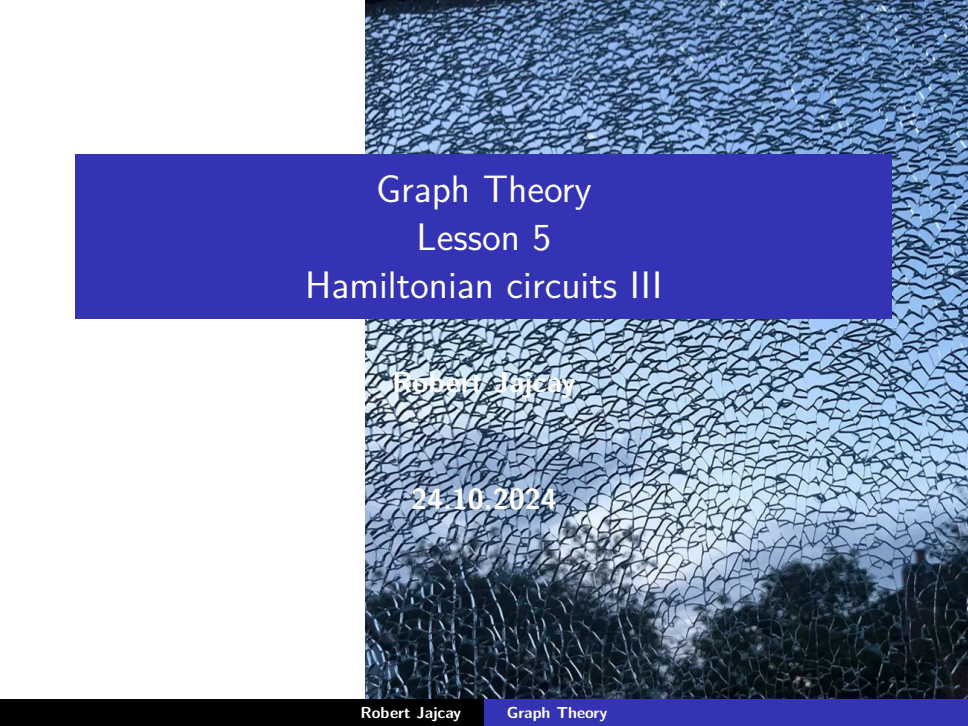




Graph Theory

Lesson 5

Hamiltonian circuits III

Robert Jajcay

24.10.2024

Veta

Nech G má hamiltonovskú kružnicu. Potom pre každú $\emptyset \neq S \subset VG$ počet $c(G \setminus S)$ komponentov grafu $G \setminus S$ neprevyšuje $|S|$.

Existujú však grafy, ktoré spĺňajú nutnú podmienku Vety a nie sú hamiltonovské.

Veta (A. Dirac, 1952)

Graf na $n \geq 3$ vrchoch a minimálnym stupňom $\delta \geq n/2$ je hamiltonovský.

Požiadavka na takýto veľký minimálny stupeň je v istom zmysle príliš silná.

Ore si všimol, že podmienka $\delta \geq n/2$ je potrebná len na to, aby súčet stupňov každej dvojice nesusedných vrcholov bol aspoň n . Vtedy ani nepotrebuje vnorenie do maximálneho nehamiltonovského grafu. Stačí uvážiť najdlhšiu cestu P medzi nesusednými vrcholmi u a v , a P modifikovať na kružnicu v G na tej istej množine vrcholov ako P (ako v dôkaze Diracovej vety). Z voľby P a súvislosti G vyplynie, že zkonštruovaná kružnica je hamiltonovská.

Veta (Ore, 1960)

Nech G je graf na $n \geq 3$ vrchoch. Ak $\deg u + \deg v \geq n$ pre každú dvojicu nesusedných vrcholov, tak G má hamiltonovskú kružnicu.

Uvedené podmienky nie je možné zoslabiť:

1. Podmienka $\delta \geq n/2$:

uvážme graf G ktorý pozostáva z dvoch klík $K_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ a $K_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$ so spoločným vrcholom. Graf G nie je hamiltonovský a má $\delta = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Pre n nepárne uvážme kliky $K_{\frac{n-1}{2}}$ a $K_{\frac{n+1}{2}}$, opäť so spoločným vrcholom. Iným príkladom je kompletný bipartitný graf, veľkosť partií sa líši presne o 1.

2. Podmienka $\deg u + \deg v \geq n$:

$\forall uv \notin G$: uvážme graf, ktorý pozostáva z dvoch klík K_n a K_3 so spoločným vrcholom.

Doterajšie podmienky neboli naozaj podmienky na postupnosti stupňov.

Hamiltonovské postupnosti

Odvodíme teraz výsledok, ktorý je v istom zmysle spomedzi všetkých podmienok na stupne najlepší možný. Najskôr zavedieme potrebné pojmy:

1. Postupnosť $S = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ celých čísel je *grafová*, ak existuje graf G na n vrcholoch, ktoré možno očíslovať $u_1, u_2, \dots, u_n$ tak, že $\deg u_i = d_i$ pre všetky i . Krátko hovoríme, že G *realizuje* postupnosť S .

Napríklad, postupnosť 4, 4, 4, 4, 4 je realizovaná kompletným grafom K_5 a žiadnym iným, postupnosť 2, 2, 2, 2, 2, 2 má dve realizácie: kružnicu C_6 a dve kópie kompletného grafu K_3 , kým postupnosť 2, 2, 2, 2, 2, 3 nie je grafová, lebo nerealizuje žiaden graf.

2. Hovoríme, že grafová postupnosť je *hamiltonovská*, ak každý graf, ktorý ju realizuje, je hamiltonovský.

Napríklad, *grafová* postupnosť ktorá vyhovuje Diracovej podmienke $\delta \geq n/2$, $n \geq 3$ je hamiltonovská, naproti tomu 2, 2, 2, 2, 2, 2 nie je hamiltonovská.

1. Postupnosť $S^* = d_1^* \leq d_2^* \leq \dots \leq d_n^*$ *dominuje* postupnosť $S = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, označujeme $S \leq S^*$, ak $d_i \leq d_i^*$, pre všetky i .

Chvátalova veta

Teraz Diracovu vetu môžeme vysloviť aj takto:

Grafová postupnosť $S = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, $d_1 \geq n/2$, $n \geq 3$, je hamiltonovská.

Ak S^* dominuje S , tak S^* splňuje *rovnakú* podmienku ako S , t.j. $d_i^* \geq n/2$ pre všetky i , a teda S^* je hamiltonovská. V tomto zmysle je podmienka zformulovaná v nasledujúcej vete najlepšia možná.

Veta (Chvátal, 1973)

Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholech a nech postupnosť $S = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ jeho stupňov vyhovuje podmienke: Pre každé $k < \frac{n}{2}$ platí

$$d_k \leq k \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k \quad (*)$$

Potom G má hamiltonovskú kružnicu. Ak S nespĺňa podmienku $()$, tak S je dominovaná grafovou postupnosťou, ktorá nemá hamiltonovskú realizáciu.*

Dôkaz Chvátalovej vety

Dôkaz: Najskôr odvodíme platnosť prvej časti tvrdenia. Postupovať budeme nepriamo:

1. Nech G nie je hamiltonovský, pričom jeho postupnosť stupňov S vyhovuje podmienke $(\star)$. G vnoríme do maximálneho nehamiltonovského grafu G^* (rovnako ako v dôkaze Diracovej vety)
2. Všimnime si, že postupnosť S^* stupňov grafu G^* vyhovuje podmienke $(\star)$
3. Graf G^* nie je hamiltonovský, a preto nie je kompletný. Zo všetkých dvojíc vrcholov u, v takých, že $uv \notin G^*$ zvolíme 'maximálnu' nehranu, t.j. nehranu $uv \notin G^*$ s vlastnosťou $d^*u + d^*v \geq d^*x + d^*y$, pre každú $xy \notin G^*$

Dôkaz Chvátalovej vety

1. WLOG môžeme predpokladať, že

$$d^*u \leq d^*v$$

2. Z maximality G^* plynie, že $G^* + uv$ má hamiltonovskú kružnicu a teda G^* má hamiltonovskú cestu z u do v .
3. Teraz zopakujeme úvahu z dôkazu Diracovej vety. Tentoraz je $S \cap T = \emptyset$ (inak G^* má hamiltonovskú kružnicu - spor s voľbou G^*), čo znamená že

$$d^*u + d^*v = |S| + |T| < n$$

4. To spolu s $d^*u \leq d^*v$ dáva

$$d^*u < \frac{n}{2}$$

Dôkaz Chvátalovej vety

1. Pozrime sa na stupeň d^*u_i , kde $i \in S : u_iv \notin G^*$ a z maximality nehrany uv plynie

$$d^*u_i + d^*v \leq d^*u + d^*v$$

$$d^*u_i \leq d^*u$$

2. Preto G^* má aspoň $|S| = d^*u$ vrcholov stupňa nanajvýš d^*u . Položme $k = d^*u$. Potom $d_k^* \leq k < \frac{n}{2}$ a podľa $(\star)$ musí byť $d_{n-k}^* \geq n - k$.
3. Posledná nerovnosť nám hovorí, že máme $k + 1$ vrcholov stupňa aspoň $n - k$. Vrchol u nemôže byť spojený s každým z nich, lebo jeho stupeň je k . Preto existuje vrchol w taký, že $uw \notin G^*$ a $d^*w \geq n - k$

1. Odtiaľ

$$d^*u + d^*w \geq n > d^*u + d^*v,$$

čo je spor s voľbou uv (maximálna nehrana v G^*). Tým je platnosť prvej časti tvrdenia dokázaná.

Dôkaz Chvátalovej vety

Dôkaz druhej časti tvrdenia:

1. Predpokladajme, že postupnosť $S = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, $n \geq 3$, je grafová a nevyhovuje podmienke

$$d_k \leq k \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k \quad (\star),$$

pre konkrétne k , $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

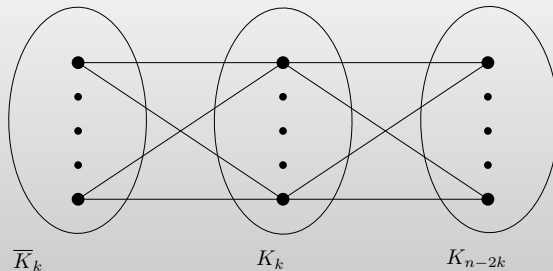
2. Potom S je dominovaná postupnosťou

$$S^* = k, k, \dots, k, n-k-1, n-k-1, \dots, n-k-1, n-1, n-1, \dots, n-1$$

How many k 's, $(n-k-1)$'s and $(n-1)$'s?

3. s k členmi rovnajúcimi sa k , s $n-2k$ členmi rovnajúcimi sa $n-k-1$, a s k členmi rovnajúcimi sa $n-1$. Postupnosť S^* je postupnosťou stupňov *jediného* grafu, označme ho $G(k, k, n)$, s množinou vrcholov $X \cup Y \cup Z$, kde $|X| = k$, $|Y| = k$, $|Z| = n-2k$ a e je hrana v $G(k, k, n)$ práve vtedy keď aspoň jeden z jej koncov leží v Y , alebo obidva jej konce ležia v Z .

Dôkaz Chvátalovej vety



Obr.: graf $G(k, k, n)$

1.

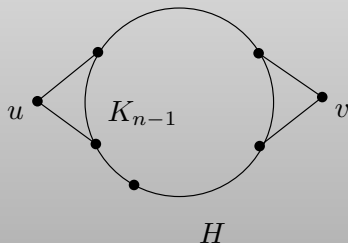
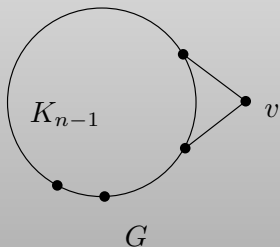
2. $G(k, k, n)$ nie je hamiltonovský - nevyhovuje našej jedinej nutnej podmienke na hamiltonovskosť



Úloha

Graf ktorý vyhovuje Oreho podmienke vyhovuje aj Chvátalovej podmienke. Dokážte.

Príklad. Graf G ukazuje, že Oreho podmienka je striktným rozšírením Chvátalovej podmienky a graf H ukazuje, že Chvátalova podmienka je striktným rozšírením Oreho podmienky.



Obr.: Porovnanie postačujúcich podmienok na stupne