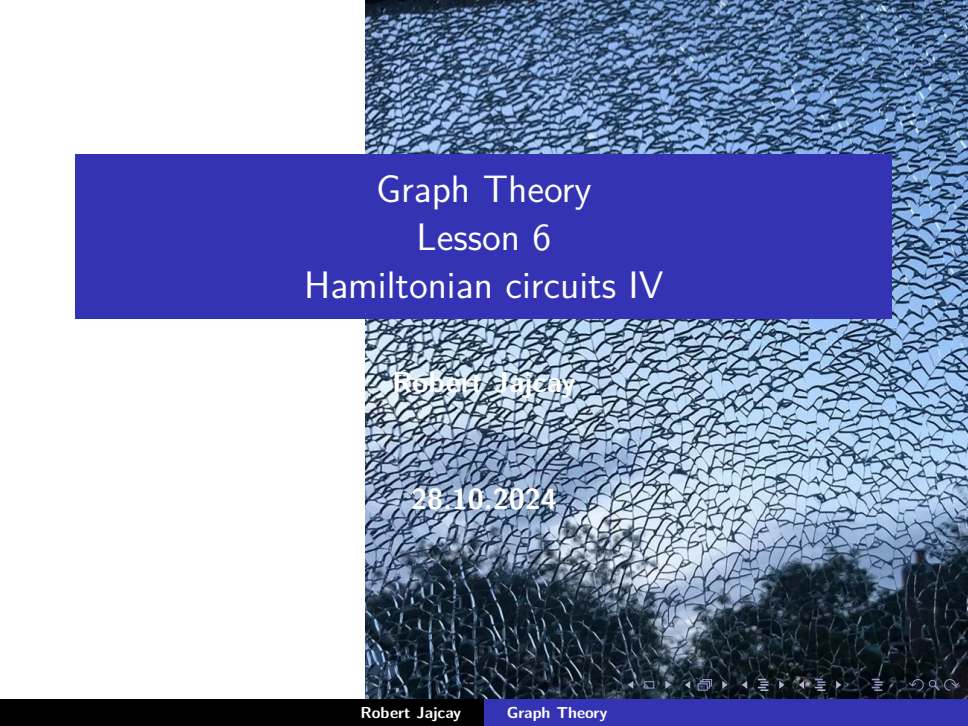




Graph Theory

Lesson 6

Hamiltonian circuits IV

Robert Jajcay

28.10.2024

Uzáver grafu

Posledná z podmienok ktorú si predstavíme je inšpirovaná Oreho vetou

¹Zdôvodni

Uzáver grafu

Posledná z podmienok ktorú si predstavíme je inšpirovaná Oreho vetou

Oreho veta: Nech G je graf na $n \geq 3$ vrchoch. Ak $\deg u + \deg v \geq n$ pre každú dvojicu u, v nesusedných vrcholov, tak G má hamiltonovskú kružnicu.

¹Zdôvodni

Posledná z podmienok ktorú si predstavíme je inšpirovaná Oreho vetou

Oreho veta: Nech G je graf na $n \geq 3$ vrchoch. Ak $\deg u + \deg v \geq n$ pre každú dvojicu u, v nesusedných vrcholov, tak G má hamiltonovskú kružnicu.

Pripomeňme si základnú myšlienku dôkazu, od tej sa budú odvíjať ďalšie úvahy:

- ★ graf G je súvislý, to zaručuje podmienka na súčet stupňov nesusedných vrcholov¹
- ★ Nech P je najdlhšia cesta v G , P modifikujeme na kružnicu na tej istej množine vrcholov ako P :
 $P = u_1, \dots, u_k$ a môžeme predpokladať, že $u_1 u_k \notin G$

¹Zdôvodni

Posledná z podmienok ktorú si predstavíme je inšpirovaná Oreho vetou

Oreho veta: Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholoch. Ak $\deg u + \deg v \geq n$ pre každú dvojicu u, v nesusedných vrcholov, tak G má hamiltonovskú kružnicu.

Pripomeňme si základnú myšlienku dôkazu, od tej sa budú odvíjať ďalšie úvahy:

- ★ graf G je súvislý, to zaručuje podmienka na súčet stupňov nesusedných vrcholov¹
- ★ Nech P je najdlhšia cesta v G , P modifikujeme na kružnicu na tej istej množine vrcholov ako P :
 $P = u_1, \dots, u_k$ a môžeme predpokladať, že $u_1 u_k \notin G$

Susedia vrcholov u_1, u_k ležia na P , preto môžeme aplikovať argument z dôkazu Diracovej vety.

¹Zdôvodni

Uzáver grafu

- ★ Sľúbená kružnica je zostrojená. Ak $k = n$, hotovo - zostrojená kružnica je hamiltonovská. Inak existuje vrchol mimo zostrojenej kružnice, z ktorého ide hrana do tejto kružnice - spor s voľbou P .

Uzáver grafu

- ★ Sľúbená kružnica je zostrojená. Ak $k = n$, hotovo - zostrojená kružnica je hamiltonovská. Inak existuje vrchol mimo zostrojenej kružnice, z ktorého ide hrana do tejto kružnice - spor s voľbou P .
- ★ Predpoklad $\deg u + \deg v \geq n$ pre každú dvojicu nesusedných vrcholov zameňme s $\deg u + \deg v \geq n$ pre konkrétnu dvojicu nesusedných vrcholov u a v . Za P zvolíme najdlhšiu cestu z u do v . Ďalej postupujme ako pred chvíľou. Prídeme ku záveru: graf G je hamiltonovský práve vtedy keď $G + uv$ je hamiltonovský.

Uzáver grafu

- ★ Sľúbená kružnica je zostrojená. Ak $k = n$, hotovo - zostrojená kružnica je hamiltonovská. Inak existuje vrchol mimo zostrojenej kružnice, z ktorého ide hrana do tejto kružnice - spor s voľbou P .
- ★ Predpoklad $\deg u + \deg v \geq n$ pre každú dvojicu nesusedných vrcholov zameňme s $\deg u + \deg v \geq n$ pre konkrétnu dvojicu nesusedných vrcholov u a v . Za P zvolíme najdlhšiu cestu z u do v . Ďalej postupujme ako pred chvíľou. Prídeme ku záveru: graf G je hamiltonovský práve vtedy keď $G + uv$ je hamiltonovský.

Lemma (Ore)

Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholech a nech u, v je dvojica nesusedných vrcholov so súčtom stupňov $\deg u + \deg v \geq n$. Potom graf G je hamiltonovský práve vtedy keď $G + uv$ je hamiltonovský.

Uzáver grafu

- ★ Slúbená kružnica je zostrojená. Ak $k = n$, hotovo - zostrojená kružnica je hamiltonovská. Inak existuje vrchol mimo zostrojenej kružnice, z ktorého ide hrana do tejto kružnice - spor s voľbou P .
- ★ Predpoklad $\deg u + \deg v \geq n$ pre každú dvojicu nesusedných vrcholov zameňme s $\deg u + \deg v \geq n$ pre konkrétnu dvojicu nesusedných vrcholov u a v . Za P zvolíme najdlhšiu cestu z u do v . Ďalej postupujme ako pred chvíľou. Prídeme ku záveru: graf G je hamiltonovský práve vtedy keď $G + uv$ je hamiltonovský.

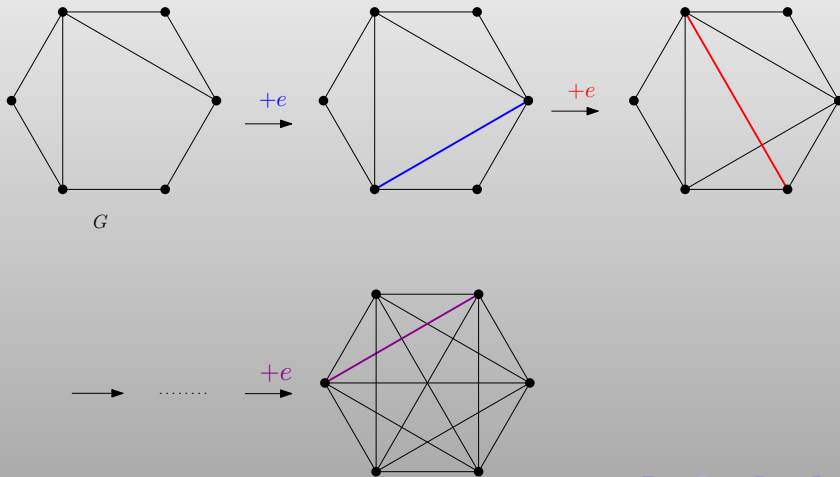
Lemma (Ore)

Nech G je graf na $n \geq 3$ vrcholech a nech u, v je dvojica nesusedných vrcholov so súčtom stupňov $\deg u + \deg v \geq n$. Potom graf G je hamiltonovský práve vtedy keď $G + uv$ je hamiltonovský.

Zmysel lemy spočíva v možnosti iterovať operáciu pridania hrany, až skončíme s grafom v ktorom je súčet stupňov ľubovoľných dvoch nesusedných vrcholov menší ako n . Tento graf nazývame **uzáver** grafu G a označujeme $c(G)$.

Uzáver grafu

Príklad. Uzáver grafu má aspoň toľko hrán ako graf z ktorého vyšiel a nanajvýš toľko ako kompletný graf. Môže nastať aj prípad 'medzi'.



Bondyho-Chvátalova veta

Úloha. Ukážete, že uzáver grafu je dobře definovaný.

Bondyho-Chvátalova veta

Úloha. Ukážte, že uzáver grafu je dobre definovaný.

Priamo z konštrukcie uzáveru a Oreho lemy plyní

Veta

(Bondy, Chvátal, 1976) *Graf G je hamiltonovský práve vtedy keď jeho uzáver je hamiltonovský.*

Bondyho-Chvátalova veta

Úloha. Ukážte, že uzáver grafu je dobre definovaný.

Priamo z konštrukcie uzáveru a Oreho lemy plyní

Veta

(Bondy, Chvátal, 1976) *Graf G je hamiltonovský práve vtedy keď jeho uzáver je hamiltonovský.*

Corollary

Ak uzáver grafu G je kompletný graf, tak G je hamiltonovský.

Bondyho-Chvátalova veta

Úloha. Ukážte, že uzáver grafu je dobre definovaný.

Priamo z konštrukcie uzáveru a Oreho lemy plyní

Veta

(Bondy, Chvátal, 1976) *Graf G je hamiltonovský práve vtedy keď jeho uzáver je hamiltonovský.*

Corollary

Ak uzáver grafu G je kompletný graf, tak G je hamiltonovský.

Je zrejmé, že uzáver grafu ktorý vyhovuje Oreho podmienke je kompletný graf.

Bondyho-Chvátalova veta

Úloha. Ukážte, že uzáver grafu je dobre definovaný.

Priamo z konštrukcie uzáveru a Oreho lemy plyní

Veta

(Bondy, Chvátal, 1976) *Graf G je hamiltonovský práve vtedy keď jeho uzáver je hamiltonovský.*

Corollary

Ak uzáver grafu G je kompletý graf, tak G je hamiltonovský.

Je zrejmé, že uzáver grafu ktorý vyhovuje Oreho podmienke je kompletý graf. Nie je ťažké ukázať, napr. imitovaním dôkazu Chvátalovej vety, že aj uzáver grafu, ktorý vyhovuje Chvátalovej podmienke, je kompletý.

Bondyho-Chvátalova veta

Úloha. Ukážte, že uzáver grafu je dobre definovaný.

Priamo z konštrukcie uzáveru a Oreho lemy plyní

Veta

(Bondy, Chvátal, 1976) *Graf G je hamiltonovský práve vtedy keď jeho uzáver je hamiltonovský.*

Corollary

Ak uzáver grafu G je kompletý graf, tak G je hamiltonovský.

Je zrejmé, že uzáver grafu ktorý vyhovuje Oreho podmienke je kompletý graf. Nie je ťažké ukázať, napr. imitovaním dôkazu Chvátalovej vety, že aj uzáver grafu, ktorý vyhovuje Chvátalovej podmienke, je kompletý. Súčasne graf G na predchádzajúcom obrázku ukazuje, že dôsledok Bondy-Chvátalovej vety je striktným rozšírením Bondy-Chvátalovej vety.

Doterajšie výsledky schematicky popisuje reťazec

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{CH} \subset \{c(G) = K_n\} \subset ? \subset \mathcal{H}$$

1. $\mathcal{D}$ pozostáva z grafov vyhovujúcich Diracovej podmienke
2. $\mathcal{O}$ pozostáva z grafov vyhovujúcich Oreho podmienke
3. $\mathcal{CH}$ obsahuje grafy ktoré spĺňajú Chvátalovu podmienku
4. $\mathcal{H}$ označuje grafy s hamiltonovskou kružnicou (v každej triede len grafy na $n \geq 3$ vrchoch)

Doterajšie výsledky schematicky popisuje reťazec

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{CH} \subset \{c(G) = K_n\} \subset ? \subset \mathcal{H}$$

1. $\mathcal{D}$ pozostáva z grafov vyhovujúcich Diracovej podmienke
2. $\mathcal{O}$ pozostáva z grafov vyhovujúcich Oreho podmienke
3. $\mathcal{CH}$ obsahuje grafy ktoré spĺňajú Chvátalovu podmienku
4. $\mathcal{H}$ označuje grafy s hamiltonovskou kružnicou (v každej triede len grafy na $n \geq 3$ vrcholech)

‘Zostáva’, ak pokračujeme v tejto línii,

1. popísať grafy ktorých uzáver je kompletný graf a nevyhovujú Chvátalovej podmienke
2. popísať grafy ktoré sú hamiltonovské a ich uzáver nie je nutne kompletný graf

Na záver uvedieme striktné rozšírenie Oreho podmienky, ktoré pripúšťa aby uzáver nebol kompletný graf.

Na záver uvedieme striktné rozšírenie Oreho podmienky, ktoré pripúšťa aby uzáver nebol kompletný graf.

Veta

(Geng-Hua-Fan, 1984) *Nech G je 2-súvislý graf na $n \geq 3$ vrchoch, a nech u, v sú dva vrcholy v G . Ak platí*

$$d(u, v) = 2 \implies \max\{\deg(u), \deg(v)\} \geq \frac{n}{2}$$

tak G má hamiltovskú kružnicu.

Na záver uvedieme striktné rozšírenie Oreho podmienky, ktoré pripúšťa aby uzáver nebol kompletný graf.

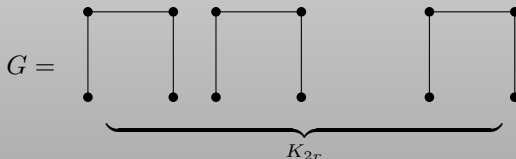
Veta

(Geng-Hua-Fan, 1984) *Nech G je 2-súvislý graf na $n \geq 3$ vrchoch, a nech u, v sú dva vrcholy v G . Ak platí*

$$d(u, v) = 2 \implies \max\{\deg(u), \deg(v)\} \geq \frac{n}{2}$$

tak G má hamiltovskú kružnicu.

Veta je podstatným zovšeobecnením Oreho vety. Graf na obrázku nižšie ukazuje, že uzáverom grafu ktorý vyhovuje predpokladom môže byť samotný graf.



Obr.: G vyhovuje predpokladom vety

Tým končíme prechádzku postačujúcimi podmienkami na stupne vrcholov.

Postačujúce podmienky na štruktúru

Koncom 70-tych rokov 20. storočia **Oberly a Sumner** publikovali článok

Every connected, locally connected graph with no induced claw is hamiltonian, Journal of Graph Theory, Vol.3, 1979, 351-356,

ktorým otvorili nový smer výskumu hamiltonovských grafov.

Postačujúce podmienky na štruktúru

Koncom 70-tych rokov 20. storočia **Oberly a Sumner** publikovali článok

Every connected, locally connected graph with no induced claw is hamiltonian, Journal of Graph Theory, Vol.3, 1979, 351-356,

ktorým otvorili nový smer výskumu hamiltonovských grafov. Zavedieme potrebné pojmy a potom sa prejdeme dôkazom ich výsledku.

Definícia

1. **Lokálne súvislý** graf G je graf, v ktorom je pre každý vrchol u podgraf indukovaný na jeho susedoch vrcholoch súvislý
2. hviezda $K_{1,3}$ sa nazýva **claw**

Veta

Súvislý, lokálne súvislý graf na $n \geq 3$ vrchoch bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.

Veta

Súvislý, lokálne súvislý graf na $n \geq 3$ vrchoch bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.

Dôkaz: Postupujme nepriamo. Nech G vyhovuje predpokladom vety a nemá hamiltonovskú kružnicu. Pozrime sa, čo z týchto predpokladov plynie pre G :

Veta

Súvislý, lokálne súvislý graf na $n \geq 3$ vrchoch bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.

Dôkaz: Postupujme nepriamo. Nech G vyhovuje predpokladom vety a nemá hamiltonovskú kružnicu. Pozrime sa, čo z týchto predpokladov plynie pre G :

1. $n \geq 3$ a lokálna súvislosť implikujú, že G obsahuje kružnicu.

Veta

Súvislý, lokálne súvislý graf na $n \geq 3$ vrchoch bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.

Dôkaz: Postupujme nepriamo. Nech G vyhovuje predpokladom vety a nemá hamiltonovskú kružnicu. Pozrime sa, čo z týchto predpokladov plynie pre G :

1. $n \geq 3$ a lokálna súvislosť implikujú, že G obsahuje kružnicu.
2. Nech C je najdlhšia kružnica v G .

Veta

Súvislý, lokálne súvislý graf na $n \geq 3$ vrchoch bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.

Dôkaz: Postupujme nepriamo. Nech G vyhovuje predpokladom vety a nemá hamiltonovskú kružnicu. Pozrime sa, čo z týchto predpokladov plynie pre G :

1. $n \geq 3$ a lokálna súvislosť implikujú, že G obsahuje kružnicu.
2. Nech C je najdlhšia kružnica v G .
3. G nie je hamiltonovský, preto existuje vrchol $v \notin C$

Veta

Súvislý, lokálne súvislý graf na $n \geq 3$ vrchoch bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.

Dôkaz: Postupujme nepriamo. Nech G vyhovuje predpokladom vety a nemá hamiltonovskú kružnicu. Pozrime sa, čo z týchto predpokladov plynie pre G :

1. $n \geq 3$ a lokálna súvislosť implikujú, že G obsahuje kružnicu.
2. Nech C je najdlhšia kružnica v G .
3. G nie je hamiltonovský, preto existuje vrchol $v \notin C$
4. G je súvislý, preto v je koncom hrany $e = uv$, pričom u leží na C

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

Nech u_1, u_2 sú vrcholy *konzekutívne* s u na C . Potom

Nech u_1, u_2 sú vrcholy *konzekutívne* s u na C . Potom

1. hrany vu_1 a vu_2 nepatria do G , v opačnom prípade máme dlhšiu kružnicu než je C - spor s voľbou C

Nech u_1, u_2 sú vrcholy *konzekutívne* s u na C . Potom

1. hrany vu_1 a vu_2 nepatria do G , v opačnom prípade máme dlhšiu kružnicu než je C - spor s voľbou C
2. u_1u_2 je hrana v G , inak vu, vu_1vu_2 indukuje hviezdu $K_{1,3}$ v G - spor s predpokladom vety

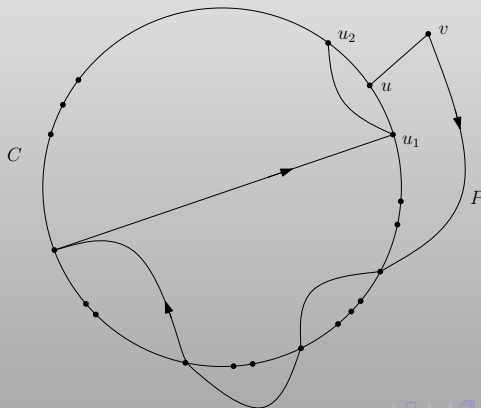
Nech u_1, u_2 sú vrcholy *konzekutívne* s u na C . Potom

1. hrany vu_1 a vu_2 nepatria do G , v opačnom prípade máme dlhšiu kružnicu než je C - spor s voľbou C
2. u_1u_2 je hrana v G , inak vu, vu_1vu_2 indukuje hviezdu $K_{1,3}$ v G - spor s predpokladom vety
3. v, u_1, u_2 sú susedné s u a v nie je sused ani jedného z nich.

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

Z lokálnej súvislosti grafu G plynie:

1. v okolí vrchola u existuje cesta z v do jedného z vrcholov u_1, u_2 ktorá neobsahuje ten druhý vrchol. (Ak by napríklad cesta z v do u_1 obsahovala u_2 tak by jej časť ktorá vedie z v do u_2 bola cestou z v do u_2 , ktorá neobsahuje u_1 .)



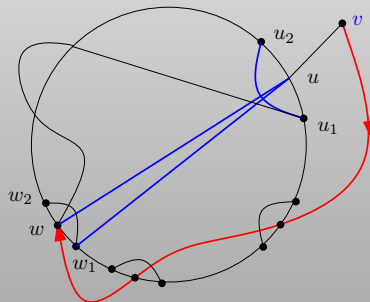
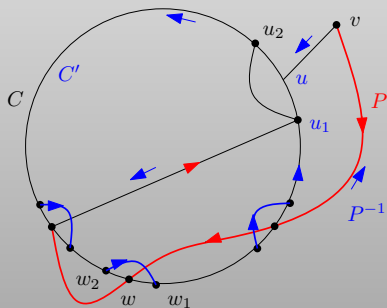
1. Nech teda P je cesta z v do u_1 , v okolí u , ktorá neobsahuje u_2 . Ak by $P \cap C = \{u_1\}$, tak by sme dostali dlhšiu kružnicu než je C . Preto $(P \cap C) \setminus \{u_1\} \neq \emptyset$

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

1. Nech teda P je cesta z v do u_1 , v okolí u , ktorá neobsahuje u_2 . Ak by $P \cap C = \{u_1\}$, tak by sme dostali dlhšiu kružnicu než je C . Preto $(P \cap C) \setminus \{u_1\} \neq \emptyset$
2. Pre vrchol $w \in (P \cap C) \setminus \{u_1\}$ nastane jedna z možností:
 - I w je *singulárny* : žiadny z vrcholov konzekutívnych s w na C nie je susedný s u , a teda neleží na P
 - I w nie je singulárny

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

Na grafe vľavo budeme ilustrovať situáciu keď každý vrchol je singulárny, grafom vpravo situáciu, keď w je prvý nesusingulárny vrchol na ktorý natrafíme keď vyjdeme z v po ceste P .



Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

1. Predpokladajme, že každý vrchol $w \in (P \cap C) \setminus \{u_1\}$ je singulárny. Potom w je susedný s u a w_1, w_2 konzekutívne s w na C nie sú susedné s u

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

1. Predpokladajme, že každý vrchol $w \in (P \cap C) \setminus \{u_1\}$ je singulárny. Potom w je susedný s u a w_1, w_2 konzekutívne s w na C nie sú susedné s u
2. indukovaný podgraf $\langle w_1, w, w_2 \rangle \neq K_{1,3}$ a tak $w_1 w_2$ je hrana v G

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

1. Predpokladajme, že každý vrchol $w \in (P \cap C) \setminus \{u_1\}$ je singulárny. Potom w je susedný s u a w_1, w_2 konzekutívne s w na C nie sú susedné s u
2. indukovaný podgraf $\langle w_1, w, w_2 \rangle \neq K_{1,3}$ a tak $w_1 w_2$ je hrana v G
3. Prejdime sa po $C \cup \{v\}$: začnime vo vrchole u_2 , pokračujme proti smeru hodinových ručičiek do u tak, že každý $w \in (P \cap C) \setminus \{u_1\}$ obídeme cez hranu $w_1 w_2$, až prídeme do u_1 . Potom pokračujeme po ceste P v *opačnom* smere až prídeme do v , ďalej hranou vu a prechádzku uzavrieme hranou uu_2 .
Získali sme dlhšiu kružnicu než je C - spor s voľbou C .
Hotovo.

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

1. Predpokladajme teraz, že $(P \cap C) \setminus \{u_1\}$ obsahuje nesingulárny vrchol. Tento prípad prevedieme na predošlý nasledovným spôsobom:

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

1. Predpokladajme teraz, že $(P \cap C) \setminus \{u_1\}$ obsahuje nesingulárny vrchol. Tento prípad prevedieme na predošlý nasledovným spôsobom:
2. Nech w je *prvý* nesingulárny vrchol na ktorý natrafíme na ceste P z vrchola v do vrchola u , a nech w_1, w_2 sú *konzekutívne* s w na P . Vrchol w je nesingulárny, preto aspoň jeden z vrcholov w_1, w_2 leží v okolí u . Môžeme predpokladať, že je to vrchol w_1 .

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

1. Predpokladajme teraz, že $(P \cap C) \setminus \{u_1\}$ obsahuje nesingulárny vrchol. Tento prípad prevedieme na predošlý nasledovným spôsobom:
2. Nech w je *prvý* nesingulárny vrchol na ktorý natrafíme na ceste P z vrchola v do vrchola u , a nech w_1, w_2 sú *konzekutívne* s w na P . Vrchol w je nesingulárny, preto aspoň jeden z vrcholov w_1, w_2 leží v okolí u . Môžeme predpokladať, že je to vrchol w_1 .
3. Prevedieme kružnicu C na novú kružnicu C' , ktorá obsahuje presne tie isté vrcholy ako C : vymažeme hrany ww_1, uu_1, uu_2 a pridáme hrany wu, w_1u, u_1u_2

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

1. Predpokladajme teraz, že $(P \cap C) \setminus \{u_1\}$ obsahuje nesingulárny vrchol. Tento prípad prevedieme na predošlý nasledovným spôsobom:
2. Nech w je *prvý* nesingulárny vrchol na ktorý natrafíme na ceste P z vrchola v do vrchola u , a nech w_1, w_2 sú *konzekutívne* s w na P . Vrchol w je nesingulárny, preto aspoň jeden z vrcholov w_1, w_2 leží v okolí u . Môžeme predpokladať, že je to vrchol w_1 .
3. Prevedieme kružnicu C na novú kružnicu C' , ktorá obsahuje presne tie isté vrcholy ako C : vymažeme hrany ww_1, uu_1, uu_2 a pridáme hrany wu, w_1u, u_1u_2
4. vrcholy w a w_1 sú *konzekutívne* s u na C'

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

1. cesta $P' \subseteq P$ z v do w neobsahuje w_1 (inak mal byť vybraný namiesto w , lebo je tiež nesesingulárny)

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

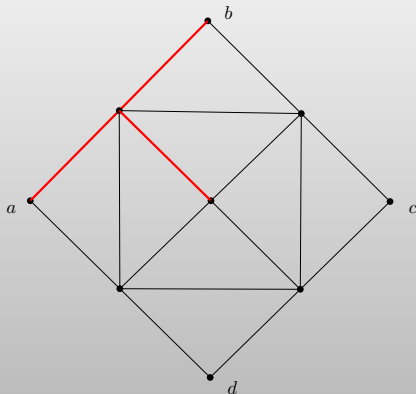
1. cesta $P' \subseteq P$ z v do w neobsahuje w_1 (inak mal byť vybraný namiesto w , lebo je tiež nesesingulárny)
2. podľa voľby w , cesta P' neobsahuje žiaden nesesingulárny vrchol.

Dôkaz Oberlyho a Sumnerovej veta; pokračovanie

1. cesta $P' \subseteq P$ z v do w neobsahuje w_1 (inak mal byť vybraný namiesto w , lebo je tiež nesesingulárny)
2. podľa voľby w , cesta P' neobsahuje žiaden nesesingulárny vrchol.
3. Súhrnom, vzhľadom na P' a C' sme sa ocitli v predošlom prípade. Dôkaz je ukončený.



Pre úplnosť uvedieme príklad, ktorý spolu s grafom na jednom z predchádzajúcich obrázkov ukazujú, že žiadnu z podmienok vo vete Oberlyho a Sumnera nie je možné vynechať.



Obr.: lokálne súvislý, nehamiltonovský graf s indukovaným $K_{1,3}$

Na záver našich úvah vyslovíme dve hypotézy, ktoré sa týkajú grafov bez indukovanvej hviezdy $K_{1,3}$.

Na záver našich úvah vyslovíme dve hypotézy, ktoré sa týkajú grafov bez indukovaněj hviezdy $K_{1,3}$.

Conjecture

(Matthews, Sumner, 1984) *Každý 4-súvislý graf bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.*

Na záver našich úvah vyslovíme dve hypotézy, ktoré sa týkajú grafov bez indukovanėj hviezdy $K_{1,3}$.

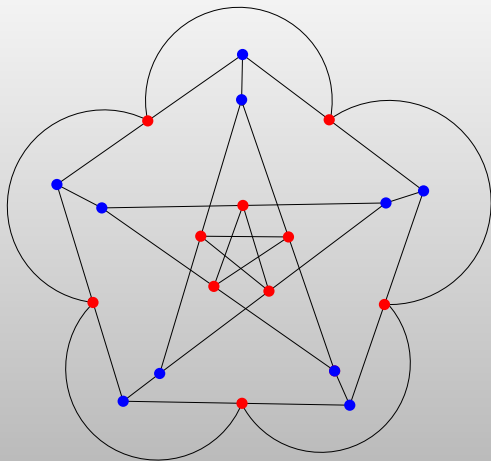
Conjecture

(Matthews, Sumner, 1984) *Každý 4-súvislý graf bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.*

Conjecture

(Thomassen, 1985) *Každý 4-súvislý hranový graf je hamiltonovský.*

Oberly-Sumner graf na obrázku nižšie ukazuje, že podmienku 4-súvislosti nie je možné zoslabiť.



Obr.: Oberly-Sumner graf je 3-súvislý nehamiltonovský, bez indukovaného $K_{1,3}$

Niektoré novšie výsledky:

Ryjáček, 1977: Hypotéza 1 a Hypotéza 2 sú ekvivalentné. Každý 7-súvislý graf bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.

Niektoré novšie výsledky:

Ryjáček, 1977: Hypotéza 1 a Hypotéza 2 sú ekvivalentné. Každý 7-súvislý graf bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.

Kaiser, Vrána, 2012: 5-súvislý graf s minimálnym stupňom $\delta \geq 6$ bez indukovaného $K_{1,3}$ je hamiltonovský.

Constructing Hamiltonian Graphs

Suppose you want to construct a 'random' hamiltonian graph.

Constructing Hamiltonian Graphs

Suppose you want to construct a 'random' hamiltonian graph.

- ★ How would you construct a graph that is guaranteed to be hamiltonian?

Constructing Hamiltonian Graphs

Suppose you want to construct a 'random' hamiltonian graph.

- ★ How would you construct a graph that is guaranteed to be hamiltonian?
- ★ Does your construction construct each hamiltonian graph?

Constructing Hamiltonian Graphs

Suppose you want to construct a 'random' hamiltonian graph.

- ★ How would you construct a graph that is guaranteed to be hamiltonian?
- ★ Does your construction construct each hamiltonian graph?
- ★ How would you construct a 'random' hamiltonian graph?

Constructing Hamiltonian Graphs

Suppose you want to construct a 'random' hamiltonian graph.

- ★ How would you construct a graph that is guaranteed to be hamiltonian?
- ★ Does your construction construct each hamiltonian graph?
- ★ How would you construct a 'random' hamiltonian graph?
- ★ Do you obtain each hamiltonian graph with the same probability?

10

Hamilton Cycles

In Chapter 1.8 we briefly discussed the problem of when a graph contains an Euler tour, a closed walk traversing every edge exactly once. The simple Theorem 1.8.1 solved that problem quite satisfactorily. Let us now ask the analogous question for vertices: when does a graph G contain a closed walk that contains every vertex of G exactly once? If $|G| \geq 3$, then any such walk is a cycle: a *Hamilton cycle* of G . If G has a Hamilton cycle, it is called *hamiltonian*. Similarly, a path in G containing every vertex of G is a *Hamilton path*.

*Hamilton
cycle*

*Hamilton
path*

Reinhard Diestel, **Graph Theory**, Electronic Edition 2005