LAG1, ZS 2018/19

T. Macko, M. Sleziak

Prednáškové úlohy 4

17.10.2018

Pozn.: Na druhej strane je ešte úloha č. 6.

1. Nech $m \geq 2$. Ukážte, že zobrazenie

$$\begin{aligned} q_m \colon (\mathbb{Z},+) &\to (\mathbb{Z}_n,+) \\ x &\mapsto r_x \quad \text{kde } x = p_x \cdot m + r_x,\ p_x, r_x \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r_x \leq m-1 \end{aligned}$$

   je homomorfizmus grúp.

   Existuje nejaký nekonštantný homomorfizmus $f\colon (\mathbb{Z}_m,+) \to (\mathbb{Z},+)$? Ak áno, nájdite ho, ak nie, uveďte prečo.

2. Nech $k, m, n \geq 2$. Ukážte, že

$$\begin{aligned} f_m \colon (\mathbb{Z}_k,+) &\to (\mathbb{Z}_{k\cdot m},+) \\ x &\mapsto m \cdot x \end{aligned}$$

   je homomorfizmus grúp. Ukážte aj, že

$$\begin{aligned} q_m \colon (\mathbb{Z}_{k\cdot m},+) &\to (\mathbb{Z}_m,+) \\ x &\mapsto r_x \quad \text{kde } x = p_x \cdot m + r_x,\ p_x, r_x \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r_x \leq m-1 \end{aligned}$$

   je homomorfizmus grúp.

   Existuje nejaký nekonštantný homomorfizmus $f\colon (\mathbb{Z}_3,+) \to (\mathbb{Z}_4,+)$ alebo $g\colon (\mathbb{Z}_4,+) \to (\mathbb{Z}_3,+)$? Ak áno, nájdite ho, ak nie, uveďte prečo.

3. Nech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ukážte, že zobrazenie

$$\begin{aligned} f\colon (\mathbb{R}^2,+) &\to (\mathbb{R}^2,+) \\ (x,y) &\mapsto (ax+cy, bx+dy) \end{aligned}$$

   je homomorfizmus grúp.

4. Ukážte, že zloženie homomorfizmov grúp je homomorfizmus grúp.
   Ukážte, že zloženie izomorfizmov grúp je izomorfizmus grúp.

5. Nech $m \geq 2$ a uvažujme homomorfizmus grúp

$$\begin{aligned} f_m \colon (\mathbb{Z},+) &\to (\mathbb{Z},+) \\ x &\mapsto m \cdot x \end{aligned}$$

   Pre každé $l \geq 2$ nájdite $f_m^{-1}(l\mathbb{Z})$.

6. Nech S_3 je grupa permutácií na trojprvkovej množine. Označme jej prvky ako na prednáške

$$S_3 = \{1_{S_3}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}.$$

Definujme zobrazenie

$$f\colon (S_3, \circ) \to (\mathbb{Z}_2, +)$$

takto

$$f\colon 1_{S_3}, \alpha_1, \alpha_2 \mapsto 0 \quad a \quad f\colon \beta_1, \beta_2, \beta_3 \mapsto 1.$$

Ukážte, že f je homomorfizmus grúp a určite $\ker(f)$ a $\operatorname{im}(f)$.

Pozn.:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$