LAG1, ZS 2019/20

T. Macko, S. Veselá, M. Sleziak

Prednáškové úlohy 3

09.10.2019

1. 1.3.6(8) Nech $(G, \cdot)$ je grupa. Dokážte, že jediný prvok $x \in G$ taký, že $x \cdot x = x$ je neutrálny prvok.
2. 1.3.6(3) Dokážte, že grupa $(G, \cdot)$ je komutatívna, ak $x \cdot x = 1$ pre každé $x \in G$. *Návod:* pouvažujte o $(x \cdot y) \cdot (y \cdot x)$.
3. Pre každú z grúp $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$ s operáciami sčitovania + modulo príslušné číslo si rozpíšte tabuľku sčitovania. Nájdite v týchto grupách všetky prvky x s vlastnosťou $x + x = 0$ a všetky prvky y s vlastnosťou $y + y + y = 0$.
4. 1.4.6(5) Nájdite všetky podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$.
5. 1.4.6(5) Nájdite všetky podgrupy grupy permutácií na troch prvkoch $(S_3, \circ)$.
6. Nech $k, l \in \mathbb{R}$ sú reálne čísla. Definujme podmnožinu $\Delta_{(k,l)} \subset \mathbb{R}^2$ ako

$$\Delta_{(k,l)} = \{(kx, lx) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

   Ukážte, že $\Delta_{(k,l)}$ je podgrupa $(\mathbb{R}^2, +)$.

   Znázornite si $\Delta_{(k,l)}$ graficky v rovine.

Bonusová úloha:

1.2.9(4) Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujme operáciu $\cdot$ takto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Dokážte, že operácia $\cdot$ je asociatívna a komutatívna. Nájdite jej neutrálny prvok. Nájdite tie prvky v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ku ktorým jestvuje inverzný prvok; určte tento inverzný prvok.