LAG1, ZS 2019/20

T. Macko, S. Veselá, M. Sleziak

Prednáškové úlohy 5
22.10.2019

1. Uvažujme homomorfizmy $f_i\colon (\mathbb{R}^2,+)\to(\mathbb{R}^2,+)$ dané nasledovne

$$\begin{aligned}
f_a\colon (x,y)&\mapsto(-y,x),\\
f_b\colon (x,y)&\mapsto(x+y,y),\\
f_c\colon (x,y)&\mapsto(x+y,y-x),\\
f_d\colon (x,y)&\mapsto(x-y,x+y).
\end{aligned}$$

   Tieto zobrazenia sú špeciálnymi prípadmi homomorfizmu z prednáškovej úlohy 3 z predchádzajúcej sady úloh, preto už vieme, že sú homomorfizmami.

   Uvažujme podgrupy $H_1=\mathbb{R}\times\{0\}$, $H_2=\{0\}\times\mathbb{R}$, $\Delta=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$, $\Delta^-=\{(x,-x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ v $\mathbb{R}^2$ ktoré je definičným oborom a zároveň aj oborom hodnôt každého z f_i. Pre každú z týchto podgrúp H a každé z týchto zobrazení f_i nájdite podgrupy $f_i(H)$ a $f_i^{-1}(H)$.

   Rada: Kreslite si pri tom obrázky.

2. Nech $k,m\geq 2$. Uvažujme homomorfizmus grúp z minulej sady úloh:

$$\begin{aligned}
q_m\colon (\mathbb{Z}_{k\cdot m},+)&\to(\mathbb{Z}_m,+)\\
x&\mapsto r_x\quad\text{kde } x=p_x\cdot m+r_x,\ p_x,r_x\in\mathbb{Z},\ 0\leq r_x\leq m-1.
\end{aligned}$$

   Nájdite $\operatorname{Ker}(q_m)$.

3. Nech $k,l\in\mathbb{R}$. Uvažujte, homomorfizmus

$$\begin{aligned}
f_{(k,l)}\colon (\mathbb{R}^2,+)&\to(\mathbb{R},+)\\
(x,y)&\mapsto kx+ly.
\end{aligned}$$

   Nájdite $\operatorname{Ker}(f_{(k,l)})$.

4. Nech G,K_1,K_2 sú grupy a nech $f_1\colon G\to K_1$ a $f_2\colon G\to K_2$ sú homomorfizmy grúp. Ukážte, že potom zobrazenie

$$\begin{aligned}
g\colon G&\to K_1\times K_2\\
x&\mapsto(f_1(x),f_2(x))
\end{aligned}$$

   je homomorfizmus grúp.

   Uvažujte ďalej prípad keď $G=\mathbb{Z}_6$, $K_1=\mathbb{Z}_2$, $K_2=\mathbb{Z}_3$, $f_1=q_2$ a $f_2=q_3$, kde q_m je ako v úlohe 1. Napíšte si zoznam hodnôt $g(x)$ pre všetky $x\in G$. Je alebo nie je g v tomto prípade aj izomorfizmus?

5. Uvažujme grupu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Nájdite všetky jej podgrupy. Táto grupa má 4 prvky. Grupa $\mathbb{Z}_4$ má tiež 4 prvky. Sú tieto grupy izomorfné?

6. Nech G je komutatívna grupa a nech H je jej podgrupa. Pre $x \in G$ uvažujme triedu ekvivalencie

$$[x] = \{x + h \mid h \in H\}$$

ako na prednáške. Ukážte, že pre každé $x, y \in G$ existuje bijekcia medzi $[x]$ a $[y]$.

7. 1.6.12(5) Dokážte, že $\{0, 2\}$ je podgrupa grupy zvyškov $\mathbb{Z}_4$. Aké prvky má faktorová grupa $\mathbb{Z}_4/\{0, 2\}$? Je grupa $\mathbb{Z}_4/\{0, 2\}$ izomorfná s grupou $\mathbb{Z}_2$?