

Prednáškové úlohy 6

30.10.2019

Úloha 6 pokračuje na druhej strane.

1. Nech $k, l \in \mathbb{R}$. Uvažujme homomorfizmus

$$f_{(k,l)}: (\mathbb{R}^2, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +) \\ (x, y) \mapsto kx + ly,$$

ako v jednej z úloh z predchádzajúcej sady. Pre ľubovoľné $b \in \mathbb{R}$ nájdite množinu riešení $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ rovnice

$$f(x, y) = kx + ly = b.$$

Táto množina riešení je vlastne $f^{-1}(\{b\})$. Pre dve $b \neq b' \in \mathbb{R}$ nájdite nejakú bijekciu $f^{-1}(\{b\}) \rightarrow f^{-1}(\{b'\})$. (Môžete si zvoliť aj konkrétne hodnoty, napr. $b = 0$ a $b = 1$ v prípade $k = -1, l = 1$.)

2. Uvažujme podgrupu $H = \{0, 3, 6\}$ grupy zvyškov \mathbb{Z}_9 . Identifikujte faktorovú grupu \mathbb{Z}_9/H .

3. V okruhu $(\mathbb{Z}[t], +, \cdot)$ ako na prednáške spočítajte

$$(1 + 3t^2 + 2t^3) + (2 + 4t - t^2 + 2t^3), (1 + 3t^2 + 2t^3) \cdot (2 + 4t - t^2 + 2t^3), \\ (1 - t) \cdot (1 + t + t^2 + t^3 + t^4), (1 - t) \cdot (1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4)$$

4. 1.7.8 (4) Prečo okruh polynómov $\mathbb{R}[t]$ nie je poľom?

5. V okruhu $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ vypočítajte

$$2 \cdot 3^{-1}, 3 \cdot 2^{-1}, 1 + 4 \cdot 3, 4 \cdot 4^{-1}, 4 \cdot 3^{-1}, 3 + 2 \cdot 4^{-1}.$$

6. Nech $m \geq 2$. Uvažujme množinu $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$, s operáciami:

$$+_m: \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m \quad x +_m y = r \quad x + y = k \cdot m + r, \quad 0 \leq r \leq m-1 \\ \cdot_m: \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m \quad x \cdot_m y = s \quad x \cdot y = l \cdot m + s, \quad 0 \leq s \leq m-1.$$

Ukážte, že $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m, 1)$ je komutatívny okruh s jednotkou.

Uvažujme ďalej množinu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[x] \mid x \in \mathbb{Z}\}$, kde príslušná relácia ekvivalencie je daná predpisom $x \sim y \Leftrightarrow x - y = m \cdot k$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$, takže máme $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$ s operáciami:

$$+_m: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \quad [x] + [y] = [x + y] \\ \cdot_m: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \quad [x] \cdot [y] = [x \cdot y].$$

Ukážte, že tieto operácie su dobre definované a že $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot, [1])$ je komutatívny okruh s jednotkou.

Ukážte, že pre funkciu

$$\bar{q}_m: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m \quad x \mapsto r, \quad \text{kde } x = k \cdot m + r, \quad 0 \leq r \leq m - 1,$$

o ktorej už vieme, že je izomorfizmom abelovských grúp $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ platí

$$\bar{q}_m([x] \cdot [y]) = \bar{q}_m([x]) \cdot_m \bar{q}_m([y]).$$

(Teda \bar{q}_m je funkcia zo $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ do $m\mathbb{Z}$, ktorá rešpektuje sčítanie a násobenie a je bijektívna. Takáto funkcia sa nazýva *izomorfizmus okruhov*. Z jej existencie vyplýva, že okruhy $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m, 1)$ a $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot, [1])$ majú zhodné okruhovo teoretické vlastnosti, hovoríme, že sú izomorfné ako okruhy. Špeciálne, jeden z nich je pole práve vtedy keď druhý z nich je pole.)