LAG1, ZS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

Prednáškové úlohy 3
04.10.2022

1. 1.3.6(3) Dokážte, že grupa $(G, \cdot)$ je komutatívna, ak $x \cdot x = 1$ pre každé $x \in G$. *Návod:* pouvažujte o $(x \cdot y) \cdot (y \cdot x)$.

2. 1.4.6(5) Nájdite všetky podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$.

3. 1.4.6(5) Nájdite všetky podgrupy grupy permutácií na troch prvkoch $(S_3, \circ)$.

4. Nech $k, l \in \mathbb{R}$ sú reálne čísla. Definujme podmnožinu $\Delta_{(k,l)} \subset \mathbb{R}^2$ ako

$$\Delta_{(k,l)} = \{(kx, lx) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

   Ukážte, že $\Delta_{(k,l)}$ je podgrupa $(\mathbb{R}^2, +)$.

   Znázornite si $\Delta_{(k,l)}$ graficky v rovine.

5. Nájdite nejakú podgrupu $(\mathbb{R}^2, +)$ inú ako triviálnu, celú a $\Delta_{(k,l)}$ z predchádzajúceho príkladu.

6. Nech H_1, H_2 sú podgrupy grupy G.
   - Ukážte, že ich prienik $H_1 \cap H_2$ je tiež podgrupou G.
   - Je aj ich zjednotenie $H_1 \cup H_2$ podgrupou G? Ak áno, dokážte, ak nie, nájdite protipríklad.

7. Ukážte, že každá podgrupa H grupy $(\mathbb{Z}, +)$ je tvaru $H = m\mathbb{Z} = \{mx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ pre nejaké $m \geq 0$.

Bonusová úloha:

1.2.9(4) Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujme operáciu $\cdot$ takto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Dokážte, že operácia $\cdot$ je asociatívna a komutatívna. Nájdite jej neutrálny prvok. Nájdite tie prvky v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ku ktorým jestvuje inverzný prvok; určte tento inverzný prvok.