

Prednáškové úlohy 4

11.10.2022

Pozn.: Na druhej strane je ešte úloha č. 6.

1. Nech $m \geq 2$. Ukážte, že zobrazenie

$$r_m: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_m, +) \\ x \mapsto r_x \quad \text{kde } x = p_x \cdot m + r_x, p_x, r_x \in \mathbb{Z}, 0 \leq r_x \leq m - 1$$

je homomorfizmus grúp.

Existuje nejaký nekonštantný homomorfizmus $f: (\mathbb{Z}_m, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$? Ak áno, nájdite ho, ak nie, uveďte prečo.

2. Nech $k, m, n \geq 2$. Ukážte, že

$$f_m: (\mathbb{Z}_k, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_{k \cdot m}, +) \\ x \mapsto m \cdot x$$

je homomorfizmus grúp a nájdite $\text{Ker}(f_m)$. Ukážte aj, že

$$r_m: (\mathbb{Z}_{k \cdot m}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_m, +) \\ x \mapsto r_x \quad \text{kde } x = p_x \cdot m + r_x, p_x, r_x \in \mathbb{Z}, 0 \leq r_x \leq m - 1$$

je homomorfizmus grúp a nájdite $\text{Ker}(r_m)$.

Existuje nejaký nekonštantný homomorfizmus $f: (\mathbb{Z}_3, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_4, +)$ alebo $g: (\mathbb{Z}_4, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_3, +)$? Ak áno, nájdite ho, ak nie, uveďte prečo.

3. Nech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ukážte, že zobrazenie

$$f: (\mathbb{R}^2, +) \rightarrow (\mathbb{R}^2, +) \\ (x, y) \mapsto (ax + cy, bx + dy)$$

je homomorfizmus grúp.

4. Ukážte, že zloženie homomorfizmov grúp je homomorfizmus grúp.

5. Nech $m \geq 2$ a uvažujme homomorfizmus grúp

$$f_m: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +) \\ x \mapsto m \cdot x$$

Pre každé $l \geq 2$ nájdite $f_m^{-1}(l\mathbb{Z})$.

6. Nech S_3 je grupa permutácií na trojprvkovej množine. Označme jej prvky ako na prednáške

$$S_3 = \{1_{S_3}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}.$$

Definujme zobrazenie

$$f: (S_3, \circ) \rightarrow (\mathbb{Z}_2, +)$$

takto

$$f: 1_{S_3}, \alpha_1, \alpha_2 \mapsto 0 \quad a \quad f: \beta_1, \beta_2, \beta_3 \mapsto 1.$$

Ukážte, že f je homomorfizmus grúp a určite $\ker(f)$ a $\text{im}(f)$.

Pozn.:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$