LAG1, ZS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

Prednáškové úlohy 5
18.10.2022

1. Uvažujme homomorfizmy $f_i\colon (\mathbb{R}^2,+) \to (\mathbb{R}^2,+)$ dané nasledovne

$$\begin{aligned} f_a\colon (x,y) &\mapsto (-y,x),\\ f_b\colon (x,y) &\mapsto (x+y,y),\\ f_c\colon (x,y) &\mapsto (x+y,y-x),\\ f_d\colon (x,y) &\mapsto (x-y,x+y). \end{aligned}$$

   Tieto zobrazenia sú špeciálnymi prípadmi homomorfizmu z prednáškovej úlohy 3 z predchádzajúcej sady úloh, preto už vieme, že sú homomorfizmami.

   Uvažujme podgrupy $H_1 = \mathbb{R}\times\{0\}$, $H_2 = \{0\}\times\mathbb{R}$, $\Delta = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\Delta^- = \{(x,-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$ v $\mathbb{R}^2$ ktoré je definičným oborom a zároveň aj oborom hodnôt každého z f_i. Pre každú z týchto podgrúp H a každé z týchto zobrazení f_i nájdite podgrupy $f_i(H)$ a $f_i^{-1}(H)$.

   Rada: Kreslite si pri tom obrázky.

2. Nech $k,m \geq 2$. Uvažujme homomorfizmus grúp z minulej sady úloh:

$$\begin{aligned} r_m\colon (\mathbb{Z}_{k\cdot m},+) &\to (\mathbb{Z}_m,+)\\ x &\mapsto r_x \quad \text{kde } x = p_x\cdot m + r_x,\ p_x,r_x\in\mathbb{Z},\ 0\leq r_x\leq m-1. \end{aligned}$$

   Nájdite $\mathrm{Ker}(q_m)$.

3. Nech $k,l \in \mathbb{R}$. Uvažujte, homomorfizmus

$$\begin{aligned} f_{(k,l)}\colon (\mathbb{R}^2,+) &\to (\mathbb{R},+)\\ (x,y) &\mapsto kx+ly. \end{aligned}$$

   Nájdite $\mathrm{Ker}(f_{(k,l)})$.

4. Nech G, K_1, K_2 sú grupy a nech $f_1\colon G\to K_1$ a $f_2\colon G\to K_2$ sú homomorfizmy grúp. Ukážte, že potom zobrazenie

$$\begin{aligned} g\colon G &\to K_1\times K_2\\ x &\mapsto (f_1(x),f_2(x)) \end{aligned}$$

   je homomorfizmus grúp.

   Uvažujte ďalej prípad keď $G=\mathbb{Z}_6$, $K_1=\mathbb{Z}_2$, $K_2=\mathbb{Z}_3$, $f_1=r_2$ a $f_2=r_3$, kde r_m je ako v úlohe 1. Napíšte si zoznam hodnôt $g(x)$ pre všetky $x\in G$. Je alebo nie je g v tomto prípade aj izomorfizmus?

5. Uvažujme grupu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Nájdite všetky jej podgrupy. Táto grupa má 4 prvky. Grupa $\mathbb{Z}_4$ má tiež 4 prvky. Sú tieto grupy izomorfné?

6. Nech G je komutatívna grupa a nech H je jej podgrupa. Pre $x \in G$ uvažujme triedu ekvivalencie

$$[x] = \{x + h \mid h \in H\}$$

ako na prednáške. Ukážte, že pre každé $x, y \in G$ existuje bijekcia medzi $[x]$ a $[y]$.

7. 1.6.12(5) Dokážte, že $\{0, 2\}$ je podgrupa grupy zvyškov $\mathbb{Z}_4$. Aké prvky má faktorová grupa $\mathbb{Z}_4/\{0, 2\}$? Je grupa $\mathbb{Z}_4/\{0, 2\}$ izomorfná s grupou $\mathbb{Z}_2$?