LAG1, ZS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

Prednáškové úlohy 6

25.10.2022

Úloha 7 pokračuje na druhej strane.

1. Nech $k, l \in \mathbb{R}$. Uvažujme homomorfizmus
$$\begin{aligned} f_{(k,l)} \colon (\mathbb{R}^2, +) &\to (\mathbb{R}, +) \\ (x, y) &\mapsto kx + ly, \end{aligned}$$
ako v jednej z úloh z predchádzajúcej sady. Pre ľubovoľné $b \in \mathbb{R}$ nájdite množinu riešení $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ rovnice
$$f(x, y) = kx + ly = b.$$
Táto množina riešení je vlastne $f^{-1}(\{b\})$. Pre dve $b \neq b' \in \mathbb{R}$ nájdite nejakú bijekciu $f^{-1}(\{b\}) \to f^{-1}(\{b'\})$. (Môžte si zvoliť aj konkrétne hodnoty, napr. $b = 0$ a $b = 1$ v prípade $k = -1$, $l = 1$.)

2. Uvažujme podgrupu $H = \{0, 3, 6\}$ grupy zvyškov $\mathbb{Z}_9$. Identifikujte faktorovú grupu $\mathbb{Z}_9/H$.

3. V okruhu $(\mathbb{Z}[t], +, \cdot)$ ako na prednáške spočítajte
$$(1 + 3t^2 + 2t^3) + (2 + 4t - t^2 + 2t^3),\ (1 + 3t^2 + 2t^3) \cdot (2 + 4t - t^2 + 2t^3),$$
$$(1 - t) \cdot (1 + t + t^2 + t^3 + t^4),\ (1 - t) \cdot (1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4)$$

4. 1.7.8 (4) Prečo okruh polynómov $\mathbb{R}[t]$ nie je poľom?

5. V okruhu $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ vypočítajte
$$2 \cdot 3^{-1},\ 3 \cdot 2^{-1},\ 1 + 4 \cdot 3,\ 4 \cdot 4^{-1},\ 4 \cdot 3^{-1},\ 3 + 2 \cdot 4^{-1}.$$

6. Nech $(R, +, \cdot)$ je okruh, ktorý má aspoň dva prvky. Ukážte, že ak pre $0 \neq x \in R$ existuje inverzný prvok vzhľadom na násobenie, tak x nemôže byť deliteľom nuly.

   (T.j. ak existuje $y \in R$ t.ž. $x \cdot y = 1 = y \cdot x$, tak pre každé $0 \neq z \in R$ platí $x \cdot z \neq 0$.)

7. Nech $m \geq 2$. Uvažujme množinu $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m - 1\}$, s operáciami:
$$\begin{aligned} +_m \colon \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m \quad & x +_m y = r,\ x + y = k \cdot m + r,\ 0 \leq r \leq m - 1; \\ \cdot_m \colon \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m \quad & x \cdot_m y = s,\ x \cdot y = l \cdot m + s,\ 0 \leq s \leq m - 1. \end{aligned}$$
Ukážte, že $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m, 1)$ je komutatívny okruh s jednotkou.

Uvažujme ďalej množinu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[x] \mid x \in \mathbb{Z}\}$, kde príslušná relácia ekvivalencie je daná predpisom $x \sim y \iff x - y = m \cdot k$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$, takže máme $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\}$ s operáciami:

$$\begin{aligned} +&\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \quad [x] + [y] = [x + y]; \\ \cdot&\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \quad [x] \cdot [y] = [x \cdot y]. \end{aligned}$$

Ukážte, že tieto operácie su dobre definované a že $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot, [1])$ je komutatívny okruh s jednotkou.

Ukážte, že pre funkciu

$$\overline{r}_m\colon \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \quad x \mapsto r, \quad \text{kde } x = k \cdot m + r,\ 0 \le r \le m - 1,$$

o ktorej už vieme, že je izomorfizmom abelovských grúp $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ platí

$$\overline{r}_m([x] \cdot [y]) = \overline{r}_m([x]) \cdot_m \overline{r}_m([y]).$$

(Teda $\overline{r}_m$ je funkcia zo $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ do $m\mathbb{Z}$, ktorá rešpektuje sčítanie a násobenie a je bijektívna. Takáto funkcia sa nazýva *izomorfizmus okruhov*. Z jej existencie vyplýva, že okruhy $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m, 1)$ a $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot, [1])$ majú zhodné okruhovo teoretické vlastnosti, hovoríme, že sú izomorfné ako okruhy. Špeciálne, jeden z nich je pole práve vtedy keď druhý z nich je pole.)