LAG2, LS 2019

T. Macko, M. Sleziak

Prednáškové úlohy 10

02.05.2019

1. Nájdite Jordanov normálny tvar (nad $\mathbb{R}$) matice
$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}.$$

2. Nájdite Jordanov normálny tvar (nad $\mathbb{R}$) matice
$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-4&-1&0&0\\7&1&2&1\\-17&-6&-1&0\end{pmatrix}.$$

3. Nájdite dve reálne štvorcové matice, ktoré majú ten istý charakteristický polynóm, ale nie sú podobné. Nájdite tiež aspoň jeden príklad takýchto matíc, kde charakteristický polynóm bude mať aspoň dva rôzne korene.

4. Nech $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je matica ortogonálnej projekcie do k-rozmerného podpriestoru v $\mathbb{R}^n$. Nájdite Jordanov normálny tvar matice P.

Bonusová úloha:

Nech $\mu(t) \in \mathbb{C}[t]$ je minimálny polynóm lineárnej transformácie $f\colon V \to V$. Predpokladajme, že ho možno rozložiť ako
$$\mu(t) = \rho(t)\cdot\omega(t),$$
kde $\rho(t)$ a $\omega(t)$ sú polynómy, ktorých vedúci koeficient je 1 a ktoré sú nesúdeliteľné. Ukážte, že každý vektor $\vec{x}$ možno jednoznačne rozložiť tak, že
$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \quad \text{pričom} \quad \rho(f)(\vec{y}) = 0 \quad \text{a} \quad \omega(f)(\vec{z}) = 0.$$
Dedukujte, že pre $V_\rho := \ker(\rho(f))$ a $V_\omega := \ker(\omega(f))$ máme
$$V = V_\rho \oplus V_\omega,$$
pričom $f(V_\rho) \subset V_\rho$ a $f(V_\omega) \subset V_\omega$.
Pomôcka 1: Využite, že z nesúdeliteľnosti $\rho(t)$ a $\omega(t)$ vyplýva, že existujú polynómy $\alpha(t)$ a $\beta(t)$ také, že
$$1 = \alpha(t)\rho(t) + \beta(t)\omega(t).$$
Pomôcka 2: Skúste špeciálny prípad $\mu(t) = (t-1)(t+1)$.