LAG2, LS 2019

T. Macko, M. Sleziak

Prednáškové úlohy 2
28.2.2019

1. Dokážte, že kososymetrická matica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je singulárna, ak n je nepárne. (Matica sa nazýva kososymetrická ak $A = -A^T$.)

2. Vyriešte pomocou Cramerových formúl reálny lineárny systém $AX = B$, ak
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 2 \\ 3 & -7 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Grammovou-Schmidtovou ortogonalizačnou metódou nájdite ortogonálnu bázu podpriestoru $S \subset \mathbb{R}^4$, $S = [(1,1,-1,-2),(2,1,0,-1),(1,2,-1,0)]$.

4. Nájdite všetky vektory v $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom, ktoré sú kolmé na všetky nasledujúce vektory:
$$(1,2,4,3),(2,0,1,-1),(1,2,-1,2),(2,0,6,4).$$

Bonusová úloha:

Zobrazenie $F\colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ krát}} \to \mathbb{R}$ sa nazýva

- multilineárne, ak je lineárne v každej premennej,
- alternujúce, ak z $\vec{u}_i = \vec{u}_j$ pre nejaké dve $1 \le i \ne j \le n$ vyplýva, že $F(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n) = 0$.

Ukážte, že pre danú konštantu $c \in \mathbb{R}$ existuje práve jedno multilineárne alternujúce zobrazenie F také, že $F(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n) = c$, kde $\vec{e}_i$ značí štandardné bázové vektory a zároveň platí pre toto zobrazenie, že
$$F(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n) = c \cdot \det(A)$$
ak $\vec{a}_i$ značí i-ty riadok štvorcovej matice A.