LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

Prednáškové úlohy 12
04.05.2023

1. Pre ľubovoľné $n \geq 1$ uvažujme maticu
$$N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Inými slovami máme $N_n = J_n(0)$, kde $J_n(0)$ je Jordanova matica stupňa n pre vlastnú hodnotu 0 ako na prednáške.

   Vypočítajte N_n^i pre každé $i \geq 1$. Špeciálne sa pozrite na N_n^2 a N_n^{n-1} a N_n^n.

   Aký je súvis medzi zobrazeniami $(f - \lambda)^i$ a týmito maticami?

   (Pozn. Matica A, pre ktorú platí, že $A^k = 0$ pre nejaké k sa nazýva *nilpotentná*.)

2. Nájdite regulárnu lineárnu transformáciu premenných, ktorá kvadratickú formu troch premenných $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ prevedie na tvar $ay_1^2 + by_2^2 + cy_3^2$, pričom a, b, c sú z množiny {0, 1, -1}.

3. Nájdite kanonický tvar kvadratickej formy $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$ a regulárnu lineárnu transformáciu premenných, v tvare $y_1 = ...$, $y_2 = ...$, $y_3 = ...$, $y_4 = ...$, ktorá túto formu prevedie na kanonický tvar.

4. Dokážte, že kvadratická forma $ax^2 + 2bxy + cy^2$ premenných x, y je kladne definitná práve vtedy, keď $a > 0$ a $ac - b^2 > 0$.

5. Nájdite všetky hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré je kvadratická forma $5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ kladne definitná.

Bonusové úlohy:

a) Dokážte, že ak matice A, $B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ sú také, že $AB = BA$, tak majú spoločný vlastný vektor.

b) Nech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je kvadratická funkcia. Hovoríme, že vektor $\vec{x}_0$ je *izotropný*, ak $\varphi(\vec{x}_0) = 0$. Dokážte, že ak existujú vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ také, že $\varphi(\vec{a}) > 0$ a $\varphi(\vec{b}) < 0$, tak existuje báza priestoru $\mathbb{R}^n$, pozostávajúca z izotropných vektorov. Navrhnite postup konštrukcie takej bázy.