LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

Prednáškové úlohy 2
16.02.2023

Úlohy pokračujú na druhej strane.

1. Pomocou Sarrusovho pravidla overte, že $\det(A) = \det(A^T)$ pre každú maticu $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

2. Je množina $\{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) | \det(A) = 0\}$ vektorovým podpriestorom priestoru $M_{3,3}(\mathbb{R})$?

3. Vyrátajte determinanty reálnych matíc

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Vyrátajte determinanty reálnych matíc

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Vyrátajte determinant reálnej matice stupňa n

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (T.j. Matica má 2 na diagonále, 1 hneď vedľa diagonály po oboch stranách a inak 0.)

6. Nech

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   je regulárna matica. Pomocou adjungovanej matice nájdite A^{-1}.

7. Nech $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ je matica taká, že $\det(A) = 1$. Ukážte, že potom aj $A^{-1} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

8. Nech

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) &= \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} \\ \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) &= \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} \\ \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) &= \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\} \end{aligned}$$

   Ukážte, že $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ sú grupy s operáciou násobenia matíc.

9. Ukážte, že súčin HTM je HTM a že súčin LTM je LTM. Ukážte, že súčin HTM a LTM a súčin LTM a HTM može byť hocičo.

10. Vynásobte

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a interpretujte geometricky.

Bonusová úloha:

Zobrazenie $F\colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ krát}} \to \mathbb{R}$ sa nazýva

- multilineárne, ak je lineárne v každej premennej,
- alternujúce, ak z $\vec{u}_i = \vec{u}_j$ pre nejaké dve $1 \leq i \neq j \leq n$ vyplýva, že $F(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = 0$.

Ukážte, že pre danú konštantu $c \in \mathbb{R}$ existuje práve jedno multilineárne alternujúce zobrazenie F také, že $F(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = c$, kde $\vec{e}_i$ značí štandardné bázové vektory a zároveň platí pre toto zobrazenie, že

$$F(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = c \cdot \det(A)$$

ak $\vec{a}_i$ značí i-ty riadok štvorcovej matice A.