LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

Prednáškové úlohy 3
23.02.2023

1. Dokážte, že kososymetrická matica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je singulárna, ak n je nepárne. (Matica sa nazýva kososymetrická ak $A = -A^T$.)

2. Vyriešte pomocou Cramerových formúl reálny lineárny systém $AX = B$, ak
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

3. Vyriešte pomocou Cramerových formúl reálny lineárny systém $AX = B$, ak
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

4. Gramovou-Schmidtovou ortogonalizačnou metódou nájdite ortogonálnu bázu podpriestoru $S \subset \mathbb{R}^4$, $S = [(1, 1, -1, -2), (2, 1, 0, -1), (1, 2, -1, 0)]$.

5. Nájdite všetky vektory v $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom, ktoré sú kolmé na všetky nasledujúce vektory:
$$(1, 2, 4, 3), (2, 0, 1, -1), (1, 2, -1, 2), (2, 0, 6, 4).$$

6. Nech $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je ortonormálna báza priestoru $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Dokážte, že ak $\vec{x} \in V$ a $\langle \vec{x}, \vec{a}_i \rangle = 0$ pre $i = 1, \ldots, n$, tak $\vec{x} = \vec{0}$.

7. Uvažujme štandardný euklidovský priestor $(\mathbb{R}^n, \langle -, - \rangle_{st})$. (Ak chcete, môžte zobrať aj prípad $n = 2$.) Uvažujte ďalej štandardnú definíciu uhla medzi vektormi ako ja kosínusu uhla zo strednej školy. S týmito definíciami ukážte, že platí:
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{st} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha),$$
kde α je uhol medzi $\vec{x}$ a $\vec{y}$.