LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S.Kalužný

Prednáškové úlohy 4

02.03.2023

1. Nech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Dokážte, že pre všetky $\vec{a}, \vec{b} \in V$
   (a) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$ (známa *kosínusová veta*)
   (b) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$.
2. Určte $S^\perp$ pre $S \subset \mathbb{R}^4$, $S = [(1,-3,1,2),(2,-1,-3,-1),(4,3,7,-1)]$.
3. Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $T = [(1,1,2)] \subset \mathbb{R}^3$.
4. Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $S = [(1,1,-1),(1,-1,0)] \subset \mathbb{R}^3$.

   (Toto je príklad, ktorý sme na prednáške robili iným spôsobom. Vyšiel rovnaký výsledok?)
5. Nech $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$. Ukážte, že pre maticu
   $$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$
   platí
   $$A_\alpha \cdot A_\alpha^T = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
6. Nech $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sú také, že $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. Ukážte, že Ukážte, že pre maticu
   $$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$
   platí
   $$A \cdot A^T = I_4,$$
   kde I_4 je jednotková matica.

Bonusová úloha:

Dokážte, že vlastnosti $P^2 = P = P^T$ *úplne charakterizujú* matice ortogonálnych projekcií v $\mathbb{R}^n$. Inými slovami ukážte, že každá matica $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ taká, že $P^2 = P = P^T$, je maticou projekcie na vhodný (ktorý konrétne?) podpriestor v $\mathbb{R}^n$.