

**Prednáškové úlohy 5**

9.3.2023

Na druhej strane je ešte jedna úloha.

1. Uvažujme  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ . Toto je grupa vzhľadom na komplexné násobenie (rozmyslite si geometrickú interpretáciu). Pre  $z \in S^1$  máme  $z = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$  pre vhodné  $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Ukážte, že zobrazenie

$$\begin{aligned} \varphi: S^1 &\rightarrow SO(2) \\ z = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

je homomorfizmus grúp. (Viete ukázať aj, že je to izomorfizmus?)

2. Aký afinný podpriestor v afinnom priestore  $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$  je množina takých  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ , že

$$\begin{aligned} 5x_1 + 9x_3 + 2x_4 &= 20 \\ x_2 &= 0? \end{aligned}$$

Nájdite aspoň tri rôzne body a aspoň dva lineárne nezávislé vektory tohto afinného podpriestoru.

3. V 4-rozmernom afinnom priestore so zvolenou afinnou súradnicovou sústavou majme body  $A \equiv (1, 2, -1, 3)$ ,  $B \equiv (2, 0, 4, -1)$ ,  $C \equiv (\frac{1}{3}, 1, 1, 0)$ . Nájdite ten jediný bod  $X$ , ktorý (podľa jednej z axiém afinného priestoru) prislúcha k bodu  $A$  a vektoru  $\overrightarrow{BC}$  tak, že  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AX}$ .
4. V  $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$  majme  $A_0 = (1, 2, -1, 0)$ ,  $A_1 = (1, 1, 2, 1)$ ,  $A_2 = (0, 1, 1, -1)$ ,  $A_3 = (0, 0, 1, 2)$ ,  $A_4 = (1, 1, 0, 0)$ . Dokážte, že usporiadaná 5-tica

$$(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}, \overrightarrow{A_0A_4})$$

je afinná súradnicová sústava a vyrátajte (vzhľadom na ňu) súradnice bodu  $X = (-1, 0, 1, 3)$ .

5. Dokážte, že  $(A_0, A_1, A_2, \dots, A_n)$  je barycentrická súradnicová sústava práve vtedy, keď  $(A_1, A_0, A_2, \dots, A_n)$  je barycentrická súradnicová sústava.
6. V  $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$  majme  $A_0 = (1, 2, -1, 0)$ ,  $A_1 = (1, 1, 2, 1)$ ,  $A_2 = (0, 1, 1, -1)$ ,  $A_3 = (0, 0, 1, 2)$ ,  $A_4 = (1, 1, 0, 0)$ . Dokážte, že  $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$  je barycentrická súradnicová sústava a vyrátajte (vzhľadom na ňu) barycentrické súradnice bodu  $X = (-1, 0, 1, 3)$ .

7. Nech  $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  je afinné zobrazenie určené tým, že  $f(A_0) = (1, 1)$ ,  $f(A_1) = (1, 2)$ ,  $f(A_2) = (0, 0)$ ,  $f(A_3) = (0, 1)$ ,  $f(A_4) = (-1, 1)$ , pričom  $A_0 = (1, 2, -1, 0)$ ,  $A_1 = (1, 1, 2, 1)$ ,  $A_2 = (0, 1, 1, -1)$ ,  $A_3 = (0, 0, 1, 2)$ ,  $A_4 = (1, 1, 0, 0)$ .
- Vyrátajte  $\varphi(Y - A_0)$ , ak  $Y = (-1, 0, 1, 3)$ .