

Prednáškové úlohy 9

13.04.2023

1. Lineárna transformácia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je daná tým, že $f(1, 1, 2) = (4, 1, -4)$, $f(-1, -1, 3) = (0, -1, -6)$, $f(2, 1, -1) = (4, 3, 3)$. Vyrátajte determinant matice transformácie f vzhľadom na bázu $((1, 1, 2), (-1, -1, 3), (2, 1, -1))$.
2. Dokážte, že zobrazenie φ trojrozmerného euklidovského vektorového priestoru (V, \langle, \rangle) do seba, dané predpisom $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a}$, kde $\vec{a} \equiv (1, 2, 3)$, je lineárna transformácia tohto priestoru. Nájdite maticu tejto transformácie a) v ortonormálnej báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, v ktorej sú dané súradnice všetkých vektorov; b) v báze $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, kde $\vec{b}_1 \equiv (1, 0, 1)$, $\vec{b}_2 \equiv (2, 0, -1)$, $\vec{b}_3 \equiv (1, 1, 0)$.
3. Určte, pre ktoré $b \in \mathbb{R}$ by matice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mohli byť podobné; dokážte, že pre b , ktoré ste našli, sú naozaj podobné.
4. Dokážte, že vlastné hodnoty regulárnej matice A sú inverzné prvky (vzhľadom na násobenie) k vlastným hodnotám matice A^{-1} .
5. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bonusová úloha:

Dokážte, že ak štvorcová matica A je idempotentná, teda ak $A^2 = A$, tak všetky jej vlastné hodnoty sa rovnajú 0 alebo 1.