LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

**Prednáškové úlohy 1**
15.02.2023

1. Rozdeľte všetky permutácie na 3 a na 4 prvkoch na párne a nepárne. Koľko ich je?

2. Ukážte, že obsah rovnobežníka daného vektormi $\vec{v}_1 = (a, b)$ a $\vec{v}_2 = (c, d)$ v rovine je $V = ad - bc$.

3. Dokážte Sarrusovo pravidlo.

4. Vyriešte systém dvoch rovníc o dvoch neznámych s rozšírenou maticou danou nasledovne
$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right).$$

5. Vypočítajte determinant matice
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$
Interpretujte výsledok vzhľadom k úlohe 2. Dosaďte za $\alpha$ niektoré štandardné hodnoty, napr. $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$. Ako vyzerajú výsledné matice?

6. Pomocou Sarrusovho pravidla spočítajte determinant nasledovnej matice
$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

7. Dokážte, že pre determinant nasledovnej matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$
máme
$$\det(A) = (b - a)(c - b)(c - a).$$
Tento determinant sa volá Vandermondov determinant.

LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

**Prednáškové úlohy 2**
16.02.2023

**Úlohy pokračujú na druhej strane.**

1. Pomocou Sarrusovho pravidla overte, že $\det(A) = \det(A^T)$ pre každú maticu $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

2. Je množina $\{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) | \det(A) = 0\}$ vektorovým podpriestorom priestoru $M_{3,3}(\mathbb{R})$?

3. Vyrátajte determinanty reálnych matíc

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Vyrátajte determinanty reálnych matíc

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Vyrátajte determinant reálnej matice stupňa $n$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(T.j. Matica má 2 na diagonále, 1 hneď vedľa diagonály po oboch stranách a inak 0.)

6. Nech
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
je regulárna matica. Pomocou adjungovanej matice nájdite $A^{-1}$.

7. Nech $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ je matica taká, že $\det(A) = 1$. Ukážte, že potom aj $A^{-1} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

8. Nech
$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) &= \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\} \\ \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) &= \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} \\ \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) &= \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\} \end{aligned}$$
Ukážte, že $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ sú grupy s operáciou násobenia matíc.

9. Ukážte, že súčin HTM je HTM a že súčin LTM je LTM. Ukážte, že súčin HTM a LTM a súčin LTM a HTM može byť hocičo.

10. Vynásobte
$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
a interpretujte geometricky.

**Bonusová úloha:**

Zobrazenie $F\colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ krát}} \to \mathbb{R}$ sa nazýva

- multilineárne, ak je lineárne v každej premennej,
- alternujúce, ak z $\vec{u}_i = \vec{u}_j$ pre nejaké dve $1 \leq i \neq j \leq n$ vyplýva, že $F(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = 0$.

Ukážte, že pre danú konštantu $c \in \mathbb{R}$ existuje práve jedno multilineárne alternujúce zobrazenie $F$ také, že $F(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = c$, kde $\vec{e}_i$ značí štandardné bázové vektory a zároveň platí pre toto zobrazenie, že
$$F(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = c \cdot \det(A)$$
ak $\vec{a}_i$ značí $i$-ty riadok štvorcovej matice $A$.

LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

**Prednáškové úlohy 3**
23.02.2023

1. Dokážte, že kososymetrická matica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je singulárna, ak $n$ je nepárne. (Matica sa nazýva kososymetrická ak $A = -A^T$.)

2. Vyriešte pomocou Cramerových formúl reálny lineárny systém $AX = B$, ak
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

3. Vyriešte pomocou Cramerových formúl reálny lineárny systém $AX = B$, ak
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

4. Gramovou-Schmidtovou ortogonalizačnou metódou nájdite ortogonálnu bázu podpriestoru $S \subset \mathbb{R}^4$, $S = [(1,1,-1,-2),(2,1,0,-1),(1,2,-1,0)]$.

5. Nájdite všetky vektory v $\mathbb{R}^4$ so štandardným skalárnym súčinom, ktoré sú kolmé na všetky nasledujúce vektory:
$$(1,2,4,3),(2,0,1,-1),(1,2,-1,2),(2,0,6,4).$$

6. Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je ortonormálna báza priestoru $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Dokážte, že ak $\vec{x} \in V$ a $\langle \vec{x}, \vec{a}_i \rangle = 0$ pre $i = 1, \dots, n$, tak $\vec{x} = \vec{0}$.

7. Uvažujme štandardný euklidovský priestor $(\mathbb{R}^n, \langle -,- \rangle_{st})$. (Ak chcete, môžte zobrať aj prípad $n = 2$.) Uvažujte ďalej štandardnú definíciu uhla medzi vektormi ako ja kosínusu uhla zo strednej školy. S týmito definíciami ukážte, že platí:
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{st} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha),$$
kde $\alpha$ je uhol medzi $\vec{x}$ a $\vec{y}$.

LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S.Kalužný

**Prednáškové úlohy 4**
02.03.2023

1. Nech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Dokážte, že pre všetky $\vec{a}, \vec{b} \in V$
   (a) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$ (známa *kosínusová veta*)
   (b) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$.
2. Určte $S^\perp$ pre $S \subset \mathbb{R}^4$, $S = [(1,-3,1,2),(2,-1,-3,-1),(4,3,7,-1)]$.
3. Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $T = [(1,1,2)] \subset \mathbb{R}^3$.
4. Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $S = [(1,1,-1),(1,-1,0)] \subset \mathbb{R}^3$.

   (Toto je príklad, ktorý sme na prednáške robili iným spôsobom. Vyšiel rovnaký výsledok?)
5. Nech $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$. Ukážte, že pre maticu
   $$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$
   platí
   $$A_\alpha \cdot A_\alpha^T = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
6. Nech $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sú také, že $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. Ukážte, že Ukážte, že pre maticu
   $$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$
   platí
   $$A \cdot A^T = I_4,$$
   kde $I_4$ je jednotková matica.

**Bonusová úloha:**

Dokážte, že vlastnosti $P^2 = P = P^T$ *úplne charakterizujú* matice ortogonálnych projekcií v $\mathbb{R}^n$. Inými slovami ukážte, že každá matica $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ taká, že $P^2 = P = P^T$, je maticou projekcie na vhodný (ktorý konrétne?) podpriestor v $\mathbb{R}^n$.

LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

**Prednáškové úlohy 5**

9.3.2023

Na druhej strane je ešte jedna úloha.

1. Uvažujme $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Toto je grupa vzhľadom na komplexné násobenie (rozmyslite si geometrickú interpretáciu). Pre $z \in S^1$ máme $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ pre vhodné $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$. Ukážte, že zobrazenie

$$\varphi\colon S^1 \to SO(2)$$
$$z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

je homomorfizmus grúp. (Viete ukázať aj, že je to izomorfizmus?)

2. Aký afinný podpriestor v afinnom priestore $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ je množina takých $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, že

$$5x_1 + 9x_3 + 2x_4 = 20$$
$$x_2 = 0?$$

Nájdite aspoň tri rôzne body a aspoň dva lineárne nezávislé vektory tohto afinného podpriestoru.

3. V 4-rozmernom afinnom priestore so zvolenou afinnou súradnicovou sústavou majme body $A \equiv (1, 2, -1, 3)$, $B \equiv (2, 0, 4, -1)$, $C \equiv (\frac{1}{3}, 1, 1, 0)$. Nájdite ten jediný bod $X$, ktorý (podľa jednej z axióm afinného priestoru) prislúcha k bodu $A$ a vektoru $\overrightarrow{BC}$ tak, že $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AX}$.

4. V $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ majme $A_0 = (1, 2, -1, 0)$, $A_1 = (1, 1, 2, 1)$, $A_2 = (0, 1, 1, -1)$, $A_3 = (0, 0, 1, 2)$, $A_4 = (1, 1, 0, 0)$. Dokážte, že usporiadaná 5-tica

$$(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}, \overrightarrow{A_0A_4})$$

je affiná súradnicová sústava a vyrátajte (vzhľadom na ňu) súradnice bodu $X = (-1, 0, 1, 3)$.

5. Dokážte, že $(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n)$ je barycentrická súradnicová sústava práve vtedy, keď $(A_1, A_0, A_2, \ldots, A_n)$ je barycentrická súradnicová sústava.

6. V $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ majme $A_0 = (1, 2, -1, 0)$, $A_1 = (1, 1, 2, 1)$, $A_2 = (0, 1, 1, -1)$, $A_3 = (0, 0, 1, 2)$, $A_4 = (1, 1, 0, 0)$. Dokážte, že $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ je barycentrická súradnicová sústava a vyrátajte (vzhľadom na ňu) barycentrické súradnice bodu $X = (-1, 0, 1, 3)$.

7. Nech $(f, \varphi) : (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \to (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ je afinné zobrazenie určené tým, že $f(A_0) = (1, 1)$, $f(A_1) = (1, 2)$, $f(A_2) = (0, 0)$, $f(A_3) = (0, 1)$, $f(A_4) = (-1, 1)$, pričom $A_0 = (1, 2, -1, 0)$, $A_1 = (1, 1, 2, 1)$, $A_2 = (0, 1, 1, -1)$, $A_3 = (0, 0, 1, 2)$, $A_4 = (1, 1, 0, 0)$.

   Vyrátajte $\varphi(Y - A_0)$, ak $Y = (-1, 0, 1, 3)$.

LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

**Prednáškové úlohy 6**
16.3.2023

1. Nájdite parametrické vyjadrenie roviny $\alpha$, obsahujúcej body

$$A \equiv (-1, 1, 0, 1, 5), B \equiv (2, -1, 3, 4, 0), C \equiv (1, 2, 7, 6, 1)$$

a zistite, či priamka $p$, prechádzajúca bodmi

$$D \equiv (2, 1, -3, 4, 1), E \equiv (0, 1, -3, 3, 1),$$

pretína rovinu $\alpha$. Ak ju pretína, určte $\alpha \cap p$.

2. Napíšte parametrické aj všeobecné vyjadrenie

(a) roviny $\mathscr{A}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi $A_0 = (1, 2, -1, 0)$, $A_1 = (1, 1, 2, 1)$, $A_2 = (0, 1, 1, -1)$, $A_3 = (0, 0, 1, 2)$;

(b) nadroviny $\mathscr{B}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, kde $A_0$, $A_1$, $A_2$ sú ako v časti (a) a $A_3 = (0, 0, 1, 2)$. Rozhodnite, či $B \in \mathscr{B}$, ak $B = (-1, 1, -1, -3)$. Ak $B \notin \mathscr{B}$, môže byť $B \in \mathscr{A}$?

3. Určte vzájomnú polohu priamky $p$, prechádzajúcej bodmi $A \equiv (4, 2, 1, 6)$, $B \equiv (0, 4, 5, 4)$ a roviny $\alpha$, prechádzajúcej bodmi $C \equiv (1, 1, 1, 1)$, $D \equiv (3, 0, 1, 1)$, $E \equiv (1, 1, -1, 2)$.

4. Napíšte parametrické aj všeobecné vyjadrenie

(a) roviny $\mathscr{A}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi $A_0 = (1, 2, -1, 0)$, $A_1 = (1, 1, 2, 1)$, $A_2 = (0, 1, 1, -1)$;

(b) nadroviny $\mathscr{B}$ v $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ určenej bodmi $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, kde $A_0$, $A_1$, $A_2$ sú ako v časti (a) a $A_3 = (0, 0, 1, 2)$. Rozhodnite, či $B \in \mathscr{B}$, ak $B = (-1, 1, -1, -3)$. Ak $B \notin \mathscr{B}$, môže byť $B \in \mathscr{A}$?

5. V 5-rozmernom afinnom priestore určte vzájomnú polohu afinných podpriestorov

$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 = -7 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_5 = -8 \end{cases}$$

a

$$\beta \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_2 \\ x_2 = 2 \qquad + t_2 \\ x_3 = 5 - t_1 + 3t_2 \\ x_4 = 3 + 2t_1 - t_2 \\ x_5 = 1 + 3t_1 - 2t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. V 4-rozmernom afinnom priestore je daná priamka

$$p \equiv \begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 2 + 3t \\ x_3 = 3 + 4t \\ x_4 = 4 + 5t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a rovina

$$\alpha \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Ukážte, že $p$ a $\alpha$ sa nepretínajú a napíšte rovnice dvoch rovnobežných nadrovín, z ktorých jedna obsahuje priamku $p$ a druhá rovinu $\alpha$.

**Bonusová úloha:**

Dané sú priamka $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 + 2t$, $x_3 = 3 + 3t$, $x_4 = 4 + 4t$ ($t \in \mathbb{R}$) a rovina $x_1 + x_2 = -1$, $x_3 - x_4 = 1$. Ukážte, že táto priamka a rovina sa nepretínajú a napíšte analytické vyjadrenie podpriestoru minimálnej dimenzie, ktorý danou rovinou prechádza rovnobežne s danou priamkou.

LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

**Prednáškové úlohy 7**
23.03.2023

1. Aké sú súradnice vektora $\vec{x} = (6, 9, 14)$ v $\mathbb{R}^3$ vzhľadom na bázu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, ak $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3)$? Aká je matica prechodu od bázy $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ k štandardnej báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$?

2. Určte dĺžku telesovej uhlopriečky $n$-rozmernej kocky s hranou dĺžky $a$.

3. V $\mathscr{E}^4$ nájdite kolmý priemet $X^\perp$ bodu $X \equiv (5, 5, 3, 3)$ do nadroviny $\mathscr{N} \equiv 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2 = 0$.

   Nájdite aj bod $X'$, ktorý je (kolmo) súmerný k bodu $X$ vzhľadom na nadrovinu $\mathscr{N}$.

T. Macko, S. Kalužný

**Prednáškové úlohy 8**
30.03.2023

1. V $\mathscr{E}^4$ určte vzdialenosť bodu $B \equiv (5,1,0,8)$ a jeho kolmého priemetu do roviny $\beta$, prechádzajúcej bodmi $P \equiv (1,2,3,4)$, $Q \equiv (2,3,4,5)$ a $C \equiv (2,2,3,7)$.

2. Napíšte rovnicu roviny v $\mathscr{E}^3$ kolmej na priamku $\mathscr{P} \equiv \{x_2 + 2x_3 + 1 = 0, x_1 + 3x_3 + 1 = 0\}$, ak prechádza bodom $C \equiv (-1,-1,0)$.

3. V $\mathscr{E}^4$ rovina $\alpha$ prechádza bodmi $A \equiv (1,1,1,1)$, $B \equiv (2,2,0,0)$, $C \equiv (1,2,0,1)$ a priamka $\mathscr{P}$ prechádza bodmi $U \equiv (1,1,1,2)$ a $V \equiv (1,1,2,1)$. Určte vzájomnú polohu $\mathscr{P}$ a $\alpha$ a vzdialenosť medzi týmito afinnými podpriestormi.

4. V $\mathscr{E}^4$ rovina $\alpha$ prechádza bodmi $A \equiv (1,1,1,1)$, $B \equiv (3,0,1,1)$, $C \equiv (1,1,-1,2)$ a priamka $\mathscr{P}$ prechádza bodmi $U \equiv (4,2,1,6)$ a $V \equiv (0,4,5,4)$. Určte vzájomnú polohu $\mathscr{P}$ a $\alpha$ a vzdialenosť medzi týmito afinnými podpriestormi.

5. Určte uhol, ktorý zviera priamka $p \equiv x_1 = 4 + t,\ x_2 = -2t,\ x_3 = 1 - t,\ x_4 = 2,\ t \in \mathbb{R}$, s priamkou $q \equiv x_1 = 3, x_2 = t, x_3 = 5 + t, x_4 = -1,\ t \in \mathbb{R}$.

6. Nájdite dĺžky strán a vnútorné uhly trojuholníka $ABC$ v $\mathscr{E}^4$, ak $A \equiv (-1,0,-1,2)$, $B \equiv (0,2,0,3)$ a $C \equiv (2,1,1,2)$.

7. Metódou najmenších štvorcov nájdite približné riešenie systému $A \cdot X = B$ kde
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

8. Metódou najmenších štvorcov nájdite priamku, ktorá aproximuje dáta
$$(x_1, \ldots, x_4) = (2,5,7,8) \quad (y_1, \ldots, y_4) = (1,2,3,3).$$
(Značenie zodpovedá tomu z prednášky.)

LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

**Prednáškové úlohy 9**
13.04.2023

1. Lineárna transformácia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je daná tým, že $f(1, 1, 2) = (4, 1, -4)$, $f(-1, -1, 3) = (0, -1, -6)$, $f(2, 1, -1) = (4, 3, 3)$. Vyrátajte determinant matice transformácie $f$ vzhľadom na bázu $((1, 1, 2), (-1, -1, 3), (2, 1, -1))$.

2. Dokážte, že zobrazenie $\varphi$ trojrozmerného euklidovského vektorového priestoru $(V, \langle , \rangle)$ do seba, dané predpisom $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a}$, kde $\vec{a} \equiv (1, 2, 3)$, je lineárna transformácia tohto priestoru. Nájdite maticu tejto transformácie a) v ortonormálnej báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, v ktorej sú dané súradnice všetkých vektorov; b) v báze $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, kde $\vec{b}_1 \equiv (1, 0, 1)$, $\vec{b}_2 \equiv (2, 0, -1)$, $\vec{b}_3 \equiv (1, 1, 0)$.

3. Určte, pre ktoré $b \in \mathbb{R}$ by matice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mohli byť podobné; dokážte, že pre $b$, ktoré ste našli, sú naozaj podobné.

4. Dokážte, že vlastné hodnoty regulárnej matice $A$ sú inverzné prvky (vzhľadom na násobenie) k vlastným hodnotám matice $A^{-1}$.

5. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Bonusová úloha:**

Dokážte, že ak štvorcová matica $A$ je idempotentná, teda ak $A^2 = A$, tak všetky jej vlastné hodnoty sa rovnajú 0 alebo 1.

LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

**Prednáškové úlohy 10**
20.04.2023

1. Vyrátajte vlastné hodnoty a vlastné vektory komplexnej matice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$
Je matica $A$ podobná diagonálnej?

2. Vyrátajte vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Je matica $A$ podobná diagonálnej?

3. Nájdite charakteristický polynóm, vlastné hodnoty, vlastné vektory matice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
a zistite, či je podobná diagonálnej matici.

4. Nájdite reálne vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
a zistite, či je podobná diagonálnej matici.

**Bonusová úloha:**

1. Nech $A$ a $B$ sú reálne matice typu $n \times n$. Dokážte, že ak aspoň jedna z nich je regulárna, tak matice $AB$ a $BA$ sú podobné. Uveďte príklad dvoch singulárnych matíc $A$ a $B$, pre ktoré matice $AB$ a $BA$ nie sú podobné.

LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

**Prednáškové úlohy 11**
27.04.2023

1. Nájdite Jordanov normálny tvar (nad $\mathbb{R}$) matice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Nájdite Jordanov normálny tvar (nad $\mathbb{R}$) matice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Nájdite dve reálne štvorcové matice, ktoré majú ten istý charakteristický polynóm, ale nie sú podobné. Nájdite tiež aspoň jeden príklad takýchto matíc, kde charakteristický polynóm bude mať aspoň dva rôzne korene.

4. Nech $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je matica ortogonálnej projekcie do $k$-rozmerného podpriestoru v $\mathbb{R}^n$. Nájdite Jordanov normálny tvar matice $P$.

**Bonusová úloha:**

Nech $\mu(t) \in \mathbb{C}[t]$ je minimálny polynóm lineárnej transformácie $f\colon V \to V$. Predpokladajme, že ho možno rozložiť ako
$$\mu(t) = \rho(t) \cdot \omega(t),$$
kde $\rho(t)$ a $\omega(t)$ sú polynómy, ktorých vedúci koeficient je 1 a ktoré sú nesúdeliteľné. Ukážte, že každý vektor $\vec{x}$ možno jednoznačne rozložiť tak, že
$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \quad \text{pričom} \quad \rho(f)(\vec{y}) = 0 \quad \text{a} \quad \omega(f)(\vec{z}) = 0.$$
Dedukujte, že pre $V_\rho := \ker(\rho(f))$ a $V_\omega := \ker(\omega(f))$ máme
$$V = V_\rho \oplus V_\omega,$$
pričom $f(V_\rho) \subset V_\rho$ a $f(V_\omega) \subset V_\omega$.
Pomôcka 1: Využite, že z nesúdeliteľnosti $\rho(t)$ a $\omega(t)$ vyplýva, že existujú polynómy $\alpha(t)$ a $\beta(t)$ také, že
$$1 = \alpha(t)\rho(t) + \beta(t)\omega(t).$$
Pomôcka 2: Skúste špeciálny prípad $\mu(t) = (t-1)(t+1)$.

LAG2, LS 2022/23

T. Macko, S. Kalužný

**Prednáškové úlohy 12**
04.05.2023

1. Pre ľubovoľné $n \geq 1$ uvažujme maticu

$$N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Inými slovami máme $N_n = J_n(0)$, kde $J_n(0)$ je Jordanova matica stupňa $n$ pre vlastnú hodnotu 0 ako na prednáške.

   Vypočítajte $N_n^i$ pre každé $i \geq 1$. Špeciálne sa pozrite na $N_n^2$ a $N_n^{n-1}$ a $N_n^n$.

   Aký je súvis medzi zobrazeniami $(f - \lambda)^i$ a týmito maticami?

   (Pozn. Matica $A$, pre ktorú platí, že $A^k = 0$ pre nejaké $k$ sa nazýva *nilpotentná*.)

2. Nájdite regulárnu lineárnu transformáciu premenných, ktorá kvadratickú formu troch premenných $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ prevedie na tvar $ay_1^2 + by_2^2 + cy_3^2$, pričom $a$, $b$, $c$ sú z množiny {0, 1, -1}.

3. Nájdite kanonický tvar kvadratickej formy $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$ a regulárnu lineárnu transformáciu premenných, v tvare $y_1 = ...$, $y_2 = ...$, $y_3 = ...$, $y_4 = ...$, ktorá túto formu prevedie na kanonický tvar.

4. Dokážte, že kvadratická forma $ax^2 + 2bxy + cy^2$ premenných $x$, $y$ je kladne definitná práve vtedy, keď $a > 0$ a $ac - b^2 > 0$.

5. Nájdite všetky hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré je kvadratická forma $5x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ kladne definitná.

**Bonusové úlohy:**

a) Dokážte, že ak matice $A$, $B \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ sú také, že $AB = BA$, tak majú spoločný vlastný vektor.

b) Nech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je kvadratická funkcia. Hovoríme, že vektor $\vec{x}_0$ je *izotropný*, ak $\varphi(\vec{x}_0) = 0$. Dokážte, že ak existujú vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ také, že $\varphi(\vec{a}) > 0$ a $\varphi(\vec{b}) < 0$, tak existuje báza priestoru $\mathbb{R}^n$, pozostávajúca z izotropných vektorov. Navrhnite postup konštrukcie takej bázy.