LAG2, LS 2019

T. Macko, M. Sleziak

Prednáškové úlohy 3
7.3.2019

1. Nech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Dokážte, že pre všetky $\vec{a}, \vec{b} \in V$
   (a) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$ (známa *kosínusová veta*)
   (b) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$.

2. Nech $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je ortonormálna báza priestoru $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Dokážte, že ak $\vec{x} \in V$ a $\langle \vec{x}, \vec{a}_i \rangle = 0$ pre $i = 1, \dots, n$, tak $\vec{x} = \vec{0}$.

3. Určite $S^\perp$ pre $S \subset \mathbb{R}^4$, $S = [(1,-3,1,2), (2,-1,-3,-1), (4,3,7,-1)]$.

4. Nájdite maticu ortogonálnej projekcie na podpriestor $T = [(1,1,2)] \subset \mathbb{R}^3$.

5. Uvažujme $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Toto je grupa vzhľadom na komplexné násobenie (rozmyslite si geometrickú interpretáciu). Pre $z \in S^1$ máme $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ pre vhodné $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$. Ukážte, že zobrazenie

$$\varphi\colon S^1 \to SO(2)$$
$$z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

   je homomorfizmus grúp. (Viete ukázať aj, že je to izomorfizmus?)

6. Nech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sú také, že $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Ukážte, že matica

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

   patrí do $O(4)$.

Bonusová úloha:

Dokážte, že vlastnosti $P^2 = P = P^T$ *úplne charakterizujú* matice ortogonálnych projekcií v $\mathbb{R}^n$. Inými slovami ukážte, že každá matica $P \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ taká, že $P^2 = P = P^T$, je maticou projekcie na vhodný (ktorý konrétne?) podpriestor v $\mathbb{R}^n$.