LAG2, LS 2019

T. Macko, M. Sleziak

Prednáškové úlohy 8

11.04.2019

1. Lineárna transformácia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je daná tým, že $f(1,1,2) = (4,1,-4)$, $f(-1,-1,3) = (0,-1,-6)$, $f(2,1,-1) = (4,3,3)$. Vyrátajte determinant matice transformácie f vzhľadom na bázu $((1,1,2),(-1,-1,3),(2,1,-1))$.

2. Dokážte, že zobrazenie φ trojrozmerného euklidovského vektorového priestoru $(V,\langle,\rangle)$ do seba, dané predpisom $\varphi(\vec{x}) = \langle\vec{x},\vec{a}\rangle\vec{a}$, kde $\vec{a} \equiv (1,2,3)$, je lineárna transformácia tohto priestoru. Nájdite maticu tejto transformácie a) v ortonormálnej báze $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, v ktorej sú dané súradnice všetkých vektorov; b) v báze $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, kde $\vec{b}_1 \equiv (1,0,1)$, $\vec{b}_2 \equiv (2,0,-1)$, $\vec{b}_3 \equiv (1,1,0)$.

3. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Nájdite reálne vlastné hodnoty a vlastné vektory reálnej matice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
a zistite, či je podobná diagonálnej matici.

Bonusová úloha:

1. Nech A a B sú reálne matice typu $n \times n$. Dokážte, že ak aspoň jedna z nich je regulárna, tak matice AB a BA sú podobné. Uveďte príklad dvoch singulárnych matíc A a B, pre ktoré matice AB a BA nie sú podobné.
2. Dokážte, že ak štvorcová matica A je idempotentná, teda ak $A^2 = A$, tak všetky jej vlastné hodnoty sa rovnajú 0 alebo 1.