TÉMA BAKALÁRSKEJ PRÁCE: BANDLE

TIBOR MACKO

Bandl (z anglického "bundle") je skratka pre výraz "lokálne triviálna fibrácia". Nech $p\colon E \to B$ je zobrazenie topologických priestorov s vlastnosťou, že existuje priestor F a pre každý bod $b \in B$ existuje okolie $b \in U \subset B$ také, že $p^{-1}(U) \cong U \times F$ pričom tento homeomorfizmus je kompatibilný so zobrazením p naľavo a s projekciou na prvú súradnicu napravo. Potom povieme, že zobrazenie p je bandl s bázou B, totálnym priestorom E a fíbrom F.

Bandle sa vyskytujú v mnohých oblastiach matematiky a sú úplne základnou konštrukciou v diferenciálnej a algebraickej geometrii a topológii. Najznámejší banld je **Möbiov pásik**, na ktorý sa pri tejto príležitosti pozeráme nasledovne. Uvažujme štvorec $[0,1] \times [0,1]$ a na ňom reláciu ekvivalencie indukovanú vzťahmi $(0,t) \sim_1 (1, 1-t)$ pre každé $t \in [0,1]$. Faktorový priestor tejto relácie je Möbiov pásik

$$M = [0,1] \times [0,1]/\sim_1 .$$

Naviac pri tomto vyjadrení máme projekciu $p\colon (s,t) \mapsto s$ z M na $S^1 = [0,1]/\sim_2$ kde $0 \sim_2 1$. Toto zobrazenie je bandl s bázou S^1, totálnym priestorom M a fíbrom $[0,1]$.

Porovnajme si tento priestor s cylindrom. **Cylinder** $S^1 \times [0,1]$ dostaneme ako faktorový priestor štvorca $[0,1] \times [0,1]$ podľa relácie ekvivalencie indukovanej vzťahmi $(0,t) \sim_3 (1,t)$ pre každé $t \in [0,1]$:

$$S^1 \times [0,1] = [0,1] \times [0,1]/\sim_3 .$$

V tomto prípade tiež máme projekciu $p\colon (s,t) \mapsto s$ z $S^1 \times [0,1]$ na $S^1 = [0,1]/\sim_2$ a toto zobrazenie je tiež bandl s bázou S^1 a fíbrom $[0,1]$, ale totálny priestor je $S^1 \times [0,1]$, hovoríme, že tento bandl je globálne triviálny. Möbiov pásik je len lokálne triviálny, M a $S^1 \times [0,1]$ nie sú homeomorfné a je teda medzi nimi rozdiel (napríklad, lebo hranica M je súvislá a hranica $S^1 \times [0,1]$ nie je súvislá).

Ďalší známy príklad je Kleinova fľaša verzus torus. Toto sú oba bandle s bázovým priestorom S^1 a fíbrom tiež S^1, ale Kleinova fľaša je len lokálne triviálny bandl a nie globálne triviálny, kdežto torus je aj globálne triviálny.

V diferenciálnej geometrii a topológii je zásadným príkladom dotyková fibrácia TM (bandl) k hladkej variete M. Tento môže byť globálne triviálmy alebo nemusí a či je alebo nie je o variete veľa napovedá.

Vo všeobecnosti možno fixovať priestory B a F a pýtať sa, čo sú všetky bandle s B ako bázovým priestorom a F ako fíbrom. Metódami algebraickej topológie sa o tejto otázke dá veľa povedať. Cieľom práce by bolo naštudovať si nejakú teóriu a pozrieť sa na nejaké konkrétne príklady. Formalizmus, pomocou ktorého sa toto robí sa nazýva topologická K-teória [Hat17].

Literatúra

[Hat17] Allen Hatcher. Vector bundles and k-theory. 2017.

Date: 25. apríla 2020.