Homotopické grupy sfér

Tibor Macko

Habilitačná prednáška FMFI UK

Bratislava 2020

Úvod

Plán

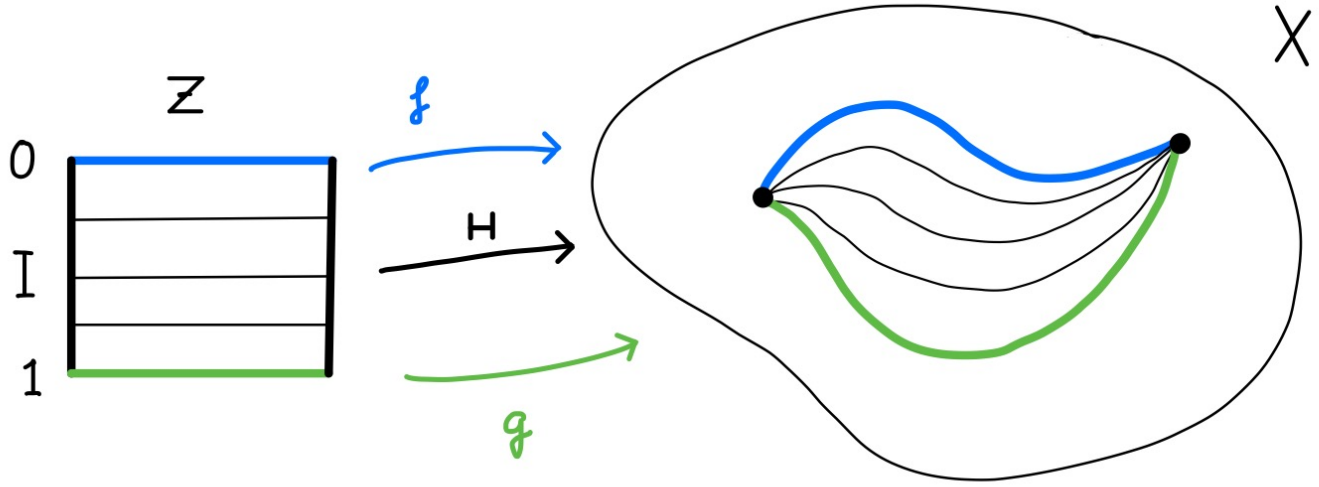
- Homotópia
- Homotopické grupy
- Homotopické grupy sfér
- Hopfove fibrácie
- J-homomorfizmus
- Výsledky a otvorené problémy

Homotópia

Definícia [Brouwer (1911)]

Nech Z a X sú topologické priestory a nech $f, g : Z \to X$ sú zobrazenia. Homotópia medzi f a g je zobrazenie $H : Z \times I \to X$, kde $I = [0, 1]$, také, že pre každé $z \in Z$

$$H(z, 0) = f(z) \quad \text{a} \quad H(z, 1) = g(z).$$



Homotópia - označenie a relatívna verzia

Označenie

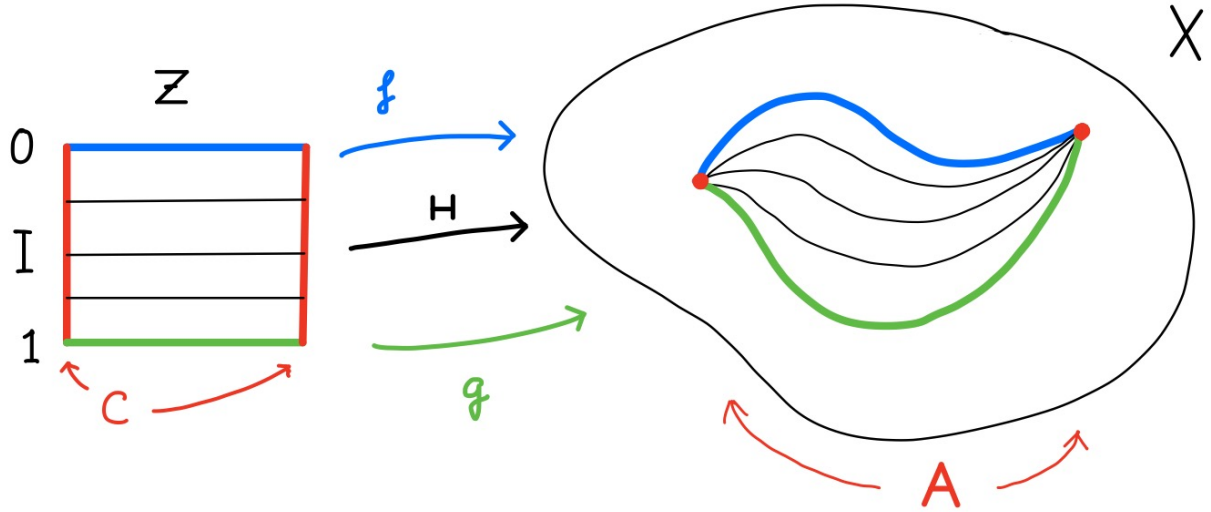
$$f \simeq g$$

$$[Z; X] := \text{Maps}\,(Z; X)/\simeq$$

Relatívna verzia

Pre páry (Z, C), (X, A) máme

$$[Z, C; X, A] := \text{Maps}\,(Z, C; X, A)/\simeq .$$



Homotopické grupy

Definícia [Poincaré $n = 1$ (1895), Čech $n \geq 2$ (1932)]

Nech $n \geq 1$ a nech X je topologický priestor s význačným bodom $x_0 \in X$. Potom definujeme *n-tú homotopickú grupu X* ako

$$\pi_n(X) = [I^n, \partial I^n; X, x_0].$$

Grupová operácia

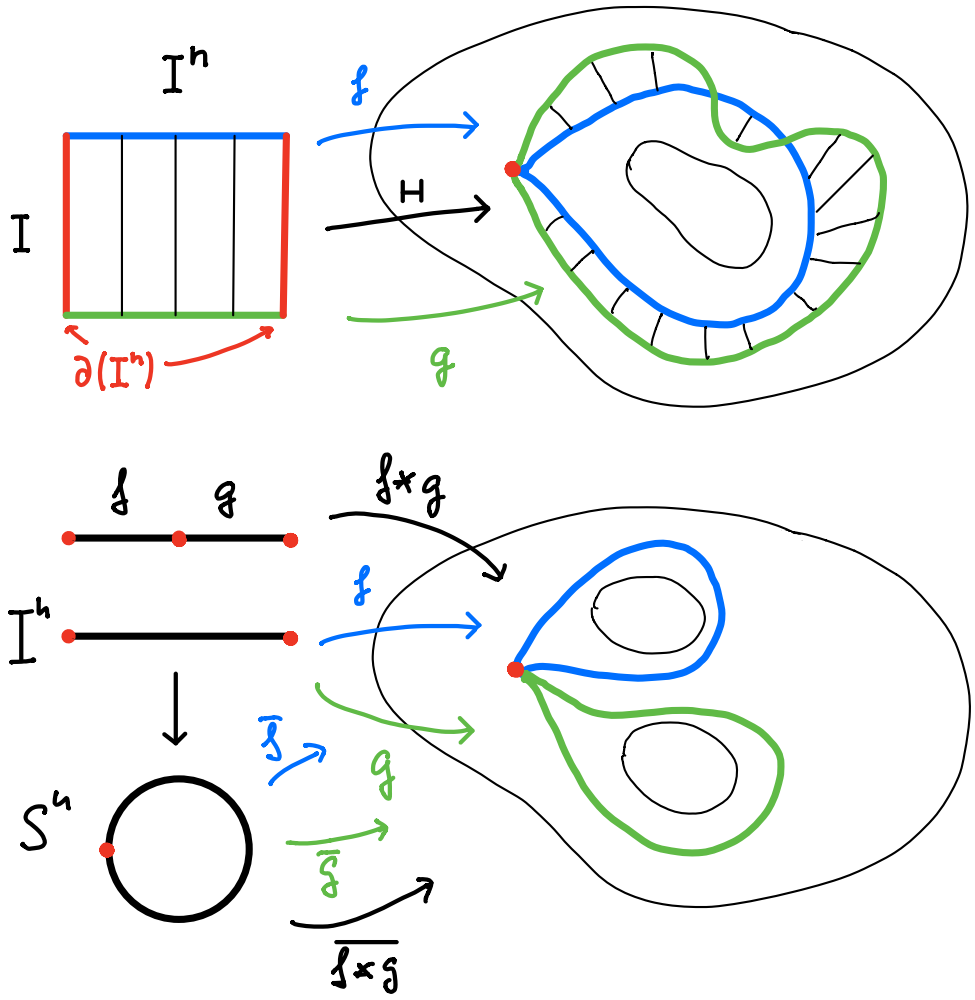
$$f, g : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0) \quad \rightsquigarrow \quad f * g : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$$

$$(f * g)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ f(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

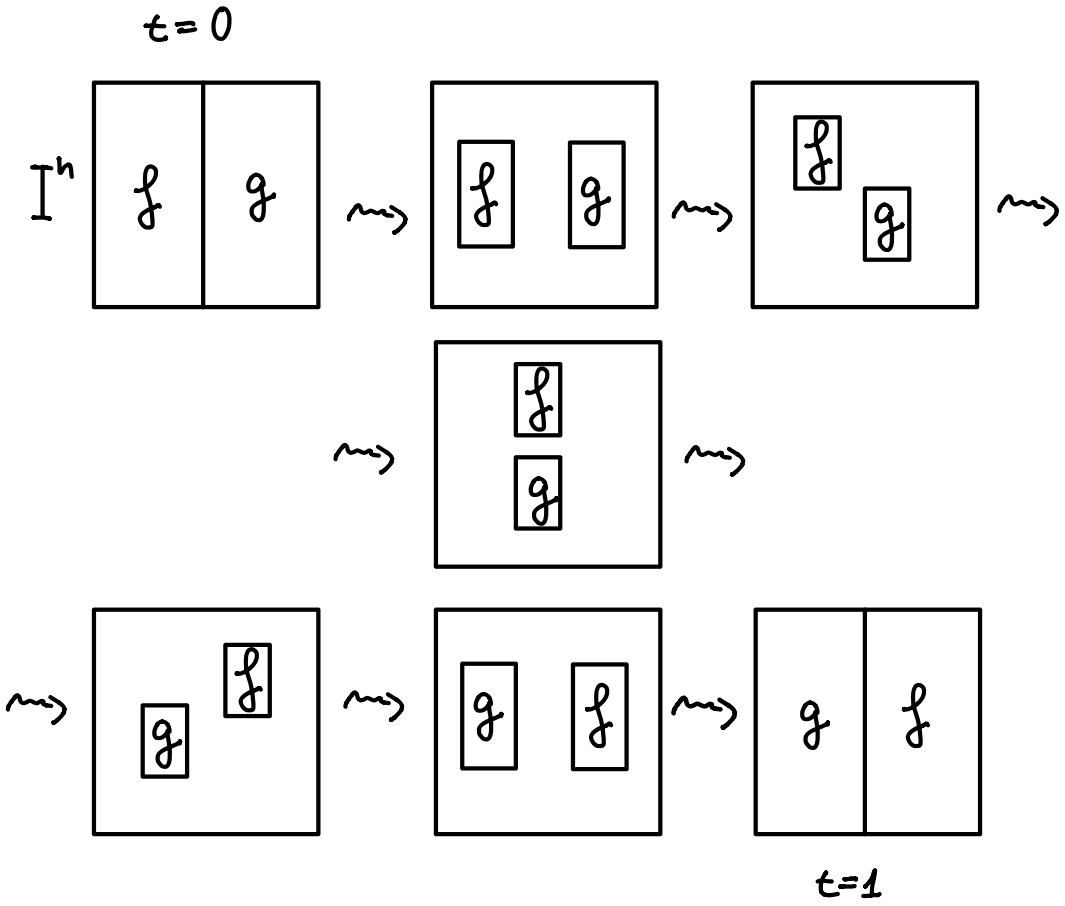
Ľahká reformulácia

$$\pi_n(X) = [I^n, \partial I^n; X, x_0] \cong [S^n, s_0; X, x_0].$$

Homotopické grupy merajú diery



Homotopické grupy sú komutatívne pre $n \geq 2$



CW-komplexy ($\sim$ bunkové komplexy)

Definícia [J.H.C. Whitehead (1941)]

CW-komplexom nazývame topologický priestor X s filtráciou $\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_k \subset X_{k+1} \subset \cdots \subset X$ takou, že $X = \cup_k X_k$,

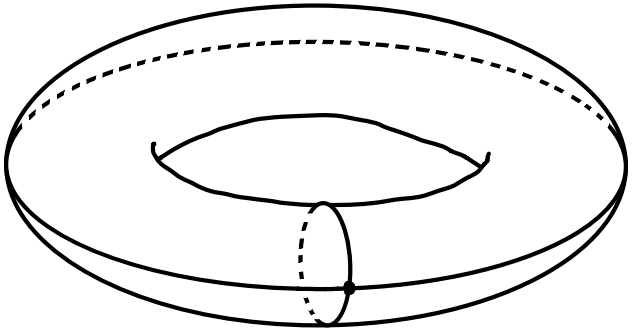
$$\begin{tikzcd}
\coprod_{I_k} S^k \arrow[r, "\coprod_{I_k} f_i"] \arrow[d, hook] & X_k \arrow[d] \\
\coprod_{I_k} D^{k+1} \arrow[r, "\coprod_{I_k} F_i"] & X_{k+1}
\end{tikzcd}$$

je pushout a topológia na X je direktná limita vzhľadom na filtráciu.

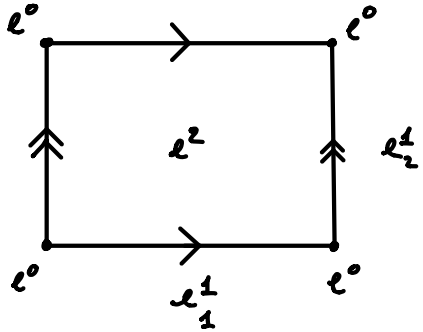
Príklady

$$S^d \times S^d = e^0 \cup e_1^d \cup e_2^d \cup e^{2d}$$
$$\mathbb{R}P^d = e^0 \cup e^1 \cup \ldots \cup e^d$$
$$\mathbb{C}P^d = e^0 \cup e^2 \cup \ldots \cup e^{2d}$$

Príklady: torus



$$T^2 = S^1 \times S^1 = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup e^2$$



Homotopická ekvivalencia a Whiteheadova veta

Definícia [Hurewicz (1935)]

Nech X a Y sú topologické priestory. Zobrazenie $f : X \to Y$ sa nazýva homotopická ekvivalencia medzi X a Y ak existuje zobrazenie $g : Y \to X$ také, že

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \quad \text{a} \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y.$$

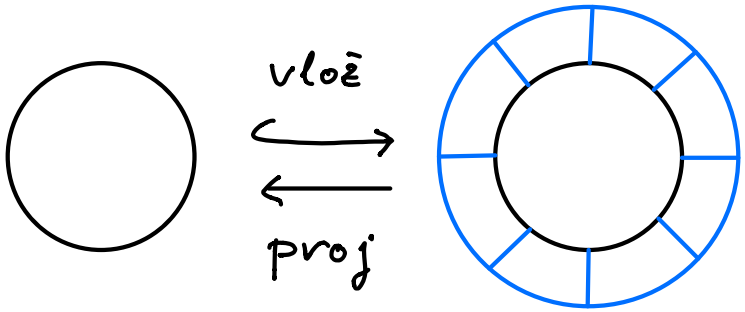
Veta [J.H.C. Whitehead (1949)]

Zobrazenie $f : X \to Y$ medzi bunkovými komplexmi je homotopická ekvivalencia práve vtedy, keď

$$\pi_n(f) : \pi_n(X) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y)$$

pre všetky $n \geq 0$.

Homotopická ekvivalencia



$$S^1 \simeq S^1 \times [0,1]$$

$\pi_1(S^1)$

Veta

$\chi\colon \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

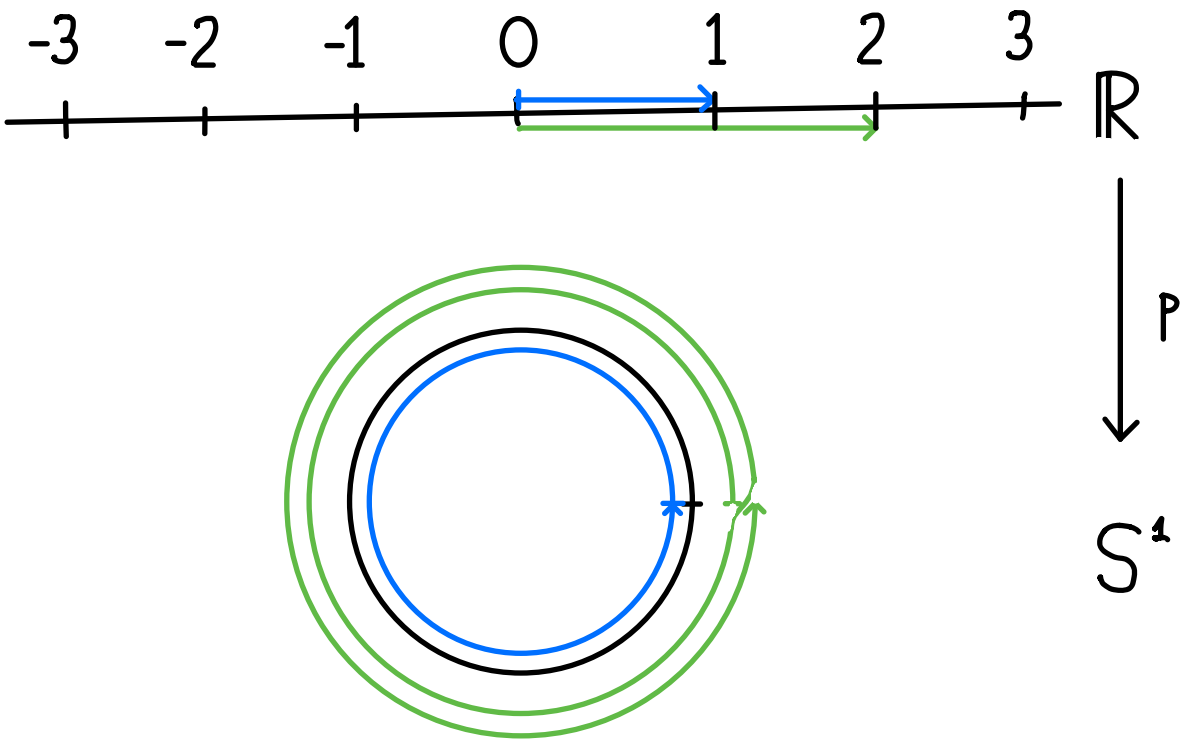
Dôkaz

Nech $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ je $t \mapsto e^{2\pi i t}$.
Vlastnosť zdvihu homotópie

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "c"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{c}"] & S^1. \end{tikzcd}$$

dáva $\chi\colon [c] \mapsto \widetilde{c}(1) \in \mathbb{Z} = p^{-1}(1) \subset \mathbb{R}$.

$\pi_1(S^1)$



$\pi_k(S^n)$ pre $k \leq n$

Veta

Ak $k < n$, tak $\pi_k(S^n) \cong 0$.

Dôkaz

Transverzalita a stiahnutie.

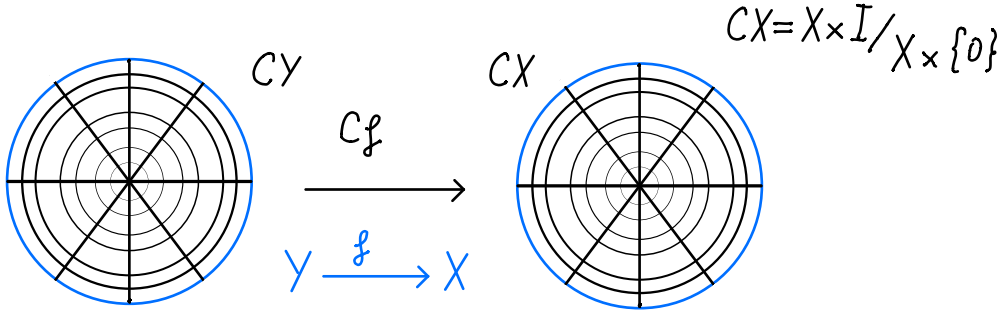
Veta [Brouwer (1912), Hopf (1926)]

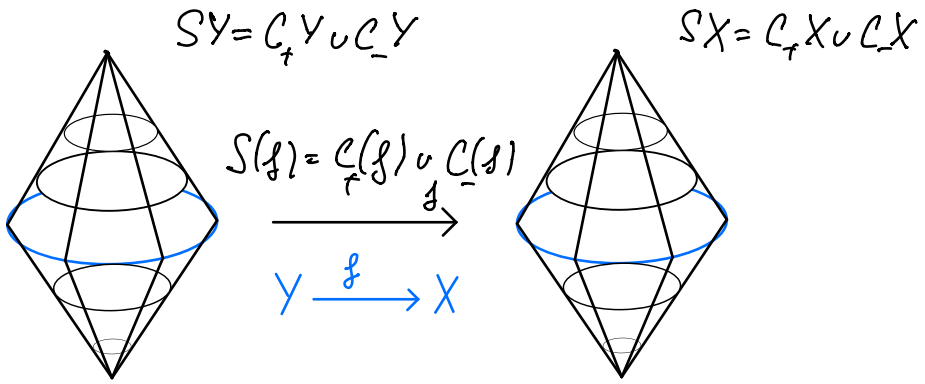
Pre každé $n \geq 1$ máme $\deg\colon \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

Dôkaz

1. Stupeň zobrazenia.
2. Freudenthalova veta o suspenzii: $\pi_n(S^n) \cong \pi_{n+1}(S^{n+1})$.

Suspenzia





$\pi_n(S^1)$

Veta

$\chi : \pi_n(S^1) \cong 0$

Dôkaz

Vlastnosť zdvihu homotópie

$$\begin{tikzcd} I^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I^n \arrow[r, "c"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{c}"] & S^1. \end{tikzcd}$$

Hopfove fibrácie

Veta [Hopf (1931-35)]

Máme

$$\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_7(S^4) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_{15}(S^8) \cong \mathbb{Z},$$

kde generátory sú dané tzv. Hopfovými fibráciami.

Dôkaz 1

Def

$$h\colon S^3 = S(\mathbb{C}^2) \to S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad \text{ako} \quad (z_1, z_2) \mapsto z_1/z_2.$$

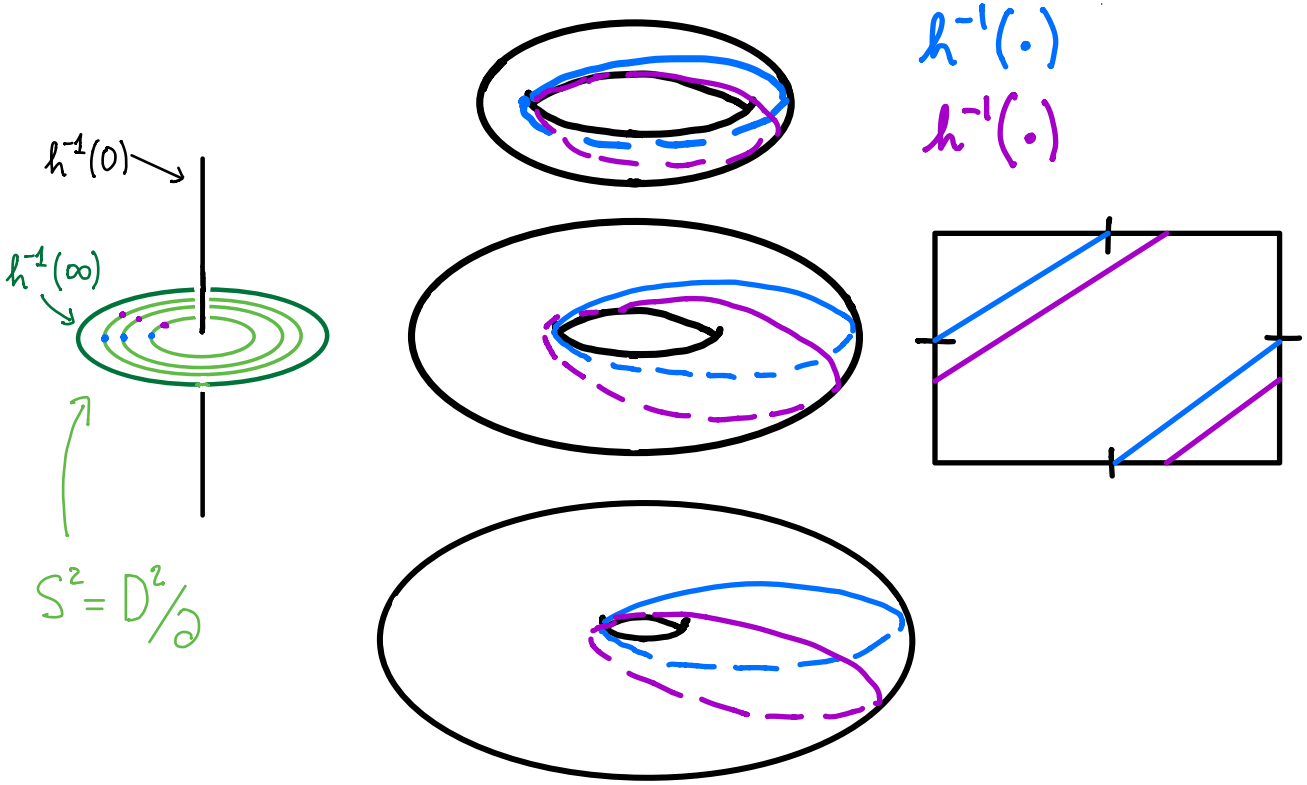
Potom $h^{-1}(c) \cong S^1$ lebo

$$\left.\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_2|^2 &= 1 \\ z_1/z_2 &= c \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow |z_2|^2 = \frac{1}{1+|c|^2}$$

Fibrácia

$$S^1 \to S^3 \to S^2$$

Hopfova fibrácia $S^3 \to S^2$ geometricky



Hopfova fibrácia $S^3 \to S^2$ v animácii

Hopfova fibrácia

(Animácia z webstránky Nilesa Johnsona)

Hopfove fibrácia $S^3 \to S^2$ generuje $\pi_3(S^2)$

Dôkaz 1

Fibrácia $S^1 \to S^3 \to S^2$ ma dlhú exaktnú postunosť

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_3(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_3(S^3) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_3(S^2) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \pi_2(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \pi_3(S^2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Exaktné postupnosti abelovských grúp

Definícia

Postupnosť abelovských grúp

$$\cdots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

sa nazýva exaktná, ak pre každé i máme $\ker(f_i) = \mathrm{im}(f_{i-1})$.

Príklad

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, "\cong"] & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\cong"] & A_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "="] & A_{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Hopfov invariant $H(h) \in \mathbb{Z}$

Dôkaz 2

Uvažujme priestor $\mathcal{C}(h) = S^2 \cup_h D^4 = \mathbb{C}P^2$.

Máme

k	0	1	2	3	4
$H^k(\mathbb{C}P^2)$	$\mathbb{Z}\{1\}$	0	$\mathbb{Z}\{\alpha\}$	0	$\mathbb{Z}\{\beta\}$

Pohárový súčin $- \cup - : H^2(\mathbb{C}P^2) \times H^2(\mathbb{C}P^2) \to H^4(\mathbb{C}P^2)$

dáva, že $\alpha \cup \alpha = H(h)\beta$ pre nejaké $H(h) \in \mathbb{Z}$.

Keďže vieme, že $H(h) = 1$, dostávame, že $h \not\simeq *$.

Konečnosť a stabilita

Veta (Serre [1951-53])

Grupy $\pi_{n+k}(S^n)$ sú konečné pre $k > 0$ okrem prípadov keď $n = 2m$, $k = 2m - 1$, v ktorých máme $\pi_{4m-1}(S^{2m}) = \mathbb{Z} \oplus F_m$, kde F_m je konečná.

Dôkaz

Spektrálne postupnosti.

Veta (Freudenthal [1937])

Zobrazenie suspenzie $S : \pi_i(S^n) \to \pi_{i+1}(S^{n+1})$ je izomorfizmus ak $i < 2n - 1$ a je epimorfizmus ak $i = 2n - 1$.

Definícia

$$\pi_n^S := \operatorname{colim}_{k\to\infty} \pi_{n+k}(S^k).$$

J-homomorfizmus: konštrukcia

Ďalšie netriviálne prvky možno získať pomocou tzv. J-homomorfizmu

$$J_{n,k}\colon \pi_n(SO(k)) \to \pi_{n+k}(S^k).$$

Konštrukcia [G.W. Whitehead (1942)]

$$J_{n,k} = H_{n,k} \circ \mathrm{ad}_{n,k}.$$

$$\mathrm{ad}_{n,k}\colon [S^n; SO(k)] \to [S^n; \mathrm{aut}(S^{k-1})] \to [S^n \times S^{k-1}; S^{k-1}]$$

$$H_{n,k}\colon [S^n \times S^{k-1}; S^{k-1}] \to [(D^{n+1} \times S^{k-1}) \cup (S^n \times D^k); D^k \cup D^k] = [S^{n+k}; S^k]$$

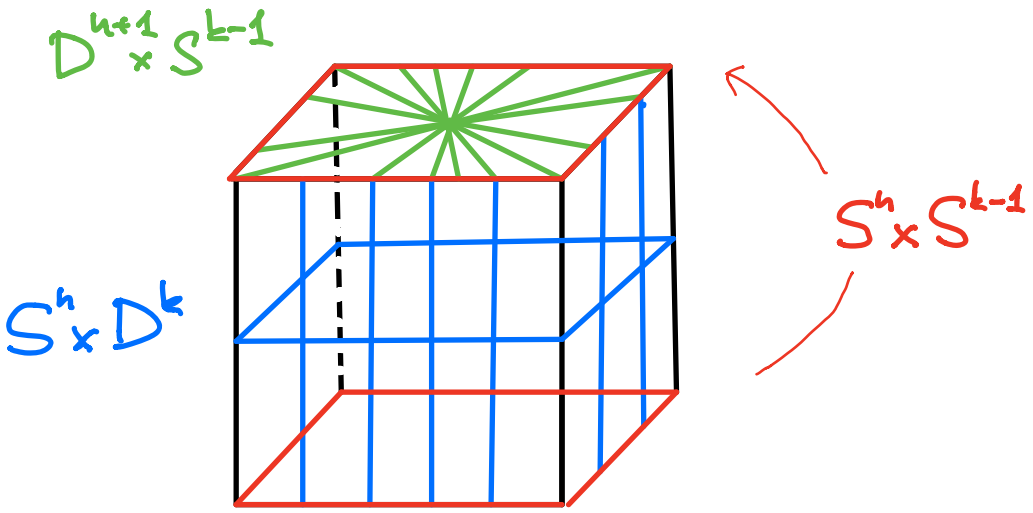
Používa

$$S^{n+k} \cong \partial(D^{n+1} \times D^k) = (D^{n+1} \times S^{k-1}) \cup_{S^n \times S^{k-1}} (S^n \times D^k)$$

Stabilizácia:

$$J_n\colon \pi_n(SO) \to \pi_n^S.$$

J-homomorfizmus



$$\partial(D^{n+1} \times D^k) = (D^{n+1} \times S^{k-1}) \cup (S^n \times D^k)$$

J-homomorfizmus: výsledky

Veta (Bott [1959])

Pre $i > 0$ máme

i mod 8	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_i(SO)$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

Veta (Adams a ďalší [1963-66])

1. Ak $n \neq 3$ mod 4, tak je J-homomorfizmus $J_n \colon \pi_n(SO) \to \pi_n^s$ injektívny;
2. Obraz J-homomorfizmu $J_{4k-1} \colon \pi_{4k-1}(SO) \to \pi_{4k-1}^s$ má rád men$(B_k/4k)$, kde B_k je k-te Bernoulliho číslo.

Bernoulliho čísla

Nech $n \geq 1$. Potom Bernoulliho číslo B_n je definované vzťahom

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} \cdot B_n}{(2n)!} \cdot (z)^{2n}.$$

Hodnoty pre nízke n sú

n	1	2	3	4	5	6	7	8
B_n	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{3617}{510}$

Z Adamsovho dôkazu

Dôležitú rolu hrá e-invariant

$$e \colon \pi_n^S \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

def podobne ako Hopfov invariant, ale pomocou K-teórie namiesto H^*.

Adamsova spektrálna postupnosť

AdSS

$$E^2_{s,t} = \mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathcal{A}_p}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \Rightarrow (\pi^S_*)_p$$

Spektrálna postupnosť

- (E^r, d_r), $d_r \colon E^r \to E^r$, $d_r \circ d_r = 0$ a $E^{r+1} = H(E^r) = \ker(d_r)/\mathrm{im}(d_r)$.
- Adamsova filtrácia $(\pi^S_*)_p$ sa nájde pomocou štúdia $H^*(*) = \mathbb{F}_p$ ako modulu nad Steenrodovou algebrou $\mathcal{A}_p$.
- e-invariant
$$e \colon \pi^S_n \to \mathrm{Ext}^{1,n+1}_{KO_*KO}(KO_*(*), KO_*(*))$$
je tzv. "edge homorphism" v Adams-Novikovovej spektrálnej postupnosti, ktorá sa konštruuje podobne ako AdSS, ale H^* je nahradená K-teóriou.

Známe výsledky v nízkych dimenziách

π_n^S

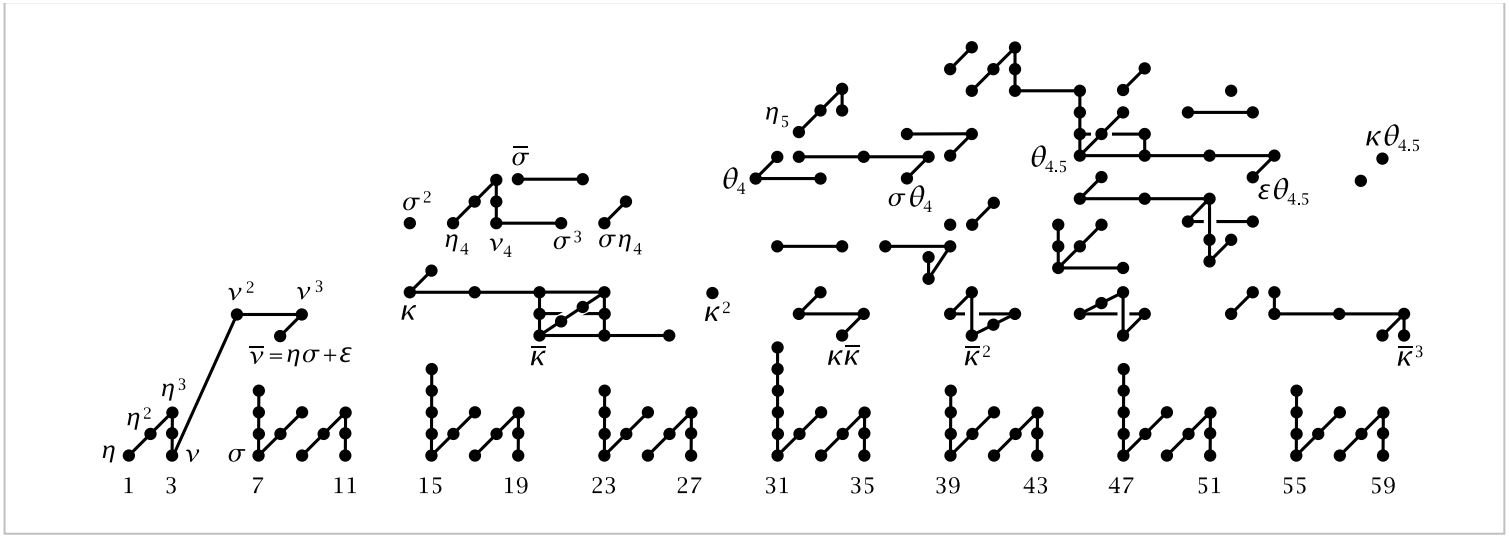
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
π_n^s	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/240$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^3$

10	11	12	13	14	15	16	17
$\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/504$	0	$\mathbb{Z}/3$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$\mathbb{Z}/480 \times \mathbb{Z}/2$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^4$

Súčasný stav (Január 2020)

Daniel C. Isaksen, Guozhen Wang, Zhouli Xu:
Stable homotopy groups of spheres
https://arxiv.org/abs/2001.04247
π_n^S známe pre $n \leq 61$, až na isté výnimky aj pre $62 \leq n \leq 90$, ďalej ???

Adams: Stable homotopy groups of spheres are a "mess".



Aplikácia a otvorené problémy

Kervaireov invariant

$$K : \pi^S_{4k+2} \to \mathbb{Z}/2.$$

Veta (Hill, Hopkins, Ravenel)

Ak pre $\theta_j \in \pi^S_{2^{j+1}-2}$ platí, že $K(\theta_j) = 1$, tak $j \leq 6$.

Dôkaz

On the nonexistence of elements of Kervaire invariant one,
Annals of Mathematics, Vol 184 (1), (2016), pp. 1-262.
Toto plus Browderova veta ukazujú, že hladké orámované variety s Kervaireovým invariantom 1 existujú
len v dimenziách $2, 6, 14, 30, 62$, a možno 126.